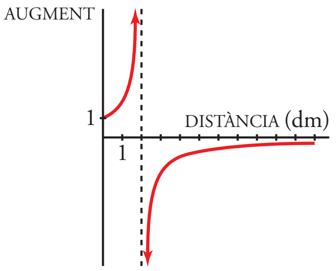
Resol

Pàgina 273

A través d'una lupa



L'*augment* A produït per una lupa determinada ve donat per l'equació següent:

$$A = \frac{2}{2-d}$$

on d és la *distància* (en decímetres) entre l'objecte que volem observar i la lupa.

Si acostem l'objecte a la lupa fins a tocar-la $(d = 0)$, la grandària es manté igual. Això, en termes de límits, s'escriu així:

$$\lim_{d \to 0} A = 1$$

Com s'escriuria el que expliquem a continuació en termes de límits?

a) Si acostem l'objecte a 2 dm, aproximadament, es fa més i més gran. A més, l'objecte es veurà del dret si $d < 2$, o invertit, si $d > 2$.

$$\lim_{d \to 2^-} A = \ldots \qquad \lim_{d \to 2^+} A = \ldots$$

b) Si allunyem la lupa de l'objecte, aquest es veu cada vegada més petit.

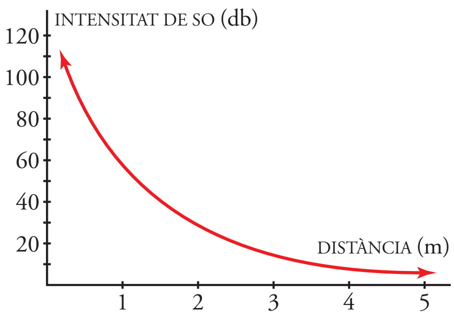
$$\lim_{d \to +\infty} A = \ldots$$

a) $\lim_{d \to 2^-} A = +\infty$

$\lim_{d \to 2^+} A = -\infty$

b) $\lim_{d \to +\infty} A = 0$

Soroll i silenci



Si acostem molt l'orella a un focus de so, aquest es fa insuportable. Si l'allunyem molt, deixa de sentir-se. Tradueix aquests fets a límits, anomenant I la *intensitat del so* (en decibels) i d la *distància* (en metres) a la qual ens col·loquem del focus emissor:

$$\lim_{d \to 0} I = \ldots \qquad \lim_{d \to +\infty} I = \ldots$$

$\lim_{d \to 0} I = +\infty \qquad \lim_{d \to +\infty} I = 0$

1 Visió intuïtiva de la continuïtat. Tipus de discontinuïtats

Pàgina 275

1 Cert o fals?

Cada una de les funcions següents és contínua en tots els punts en què és definida:

a) $y = x^2 - 1$ b) $y = \sqrt{x+2}$ c) $y = sin\, x$ d) $y = tg\, x$

e) $y = Ent\,(x)$ f) $y = Mant\,(x)$ g) $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ h) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

i) $y = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ j) $y = \begin{cases} 5x - 3 & \text{si } x \le 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Cert.

b) Cert.

c) Cert.

d) Cert.

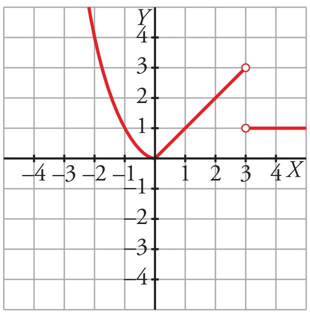
e) Fals. La funció part entera no és contínua en cap nombre enter; tanmateix, està definida en aquests.

f) Fals. La funció mantissa no és contínua en cap nombre enter.

g) Cert.

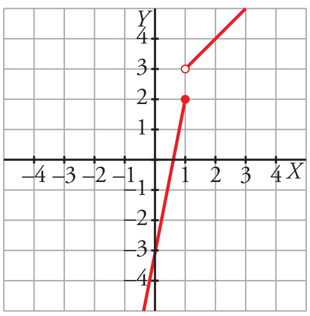
h) Cert.

i) Cert. Podem veure-ho en la seva gràfica:



En $x = 3$ no és contínua, però, com que no està definida, l'afirmació és certa.

j) Fals. No és contínua en el punt $x = 1$, on està definida.



2 **Cada una de les funcions següents té un o més punts on no és contínua. Indica quins són aquests punts i quin tipus de discontinuïtat presenten:**

a) $y = \dfrac{x+2}{x-3}$

b) $y = \dfrac{x^2-3x}{x}$

c) $y = \dfrac{x^2-3}{x}$

d) $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a) Branca infinita en $x = 3$ (asímptota vertical).

b) Discontinuïtat evitable en $x = 0$ (li falta aquest punt).

c) Branca infinita en $x = 0$ (asímptota vertical).

d) Salt en $x = 4$.

3 **Explica per què són contínues les funcions següents i determina l'interval en què són definides:**

a) $y = x^2 - 5$

b) $y = \sqrt{5-x}$

c) $y = \begin{cases} 3x-4 & \text{si } x < 3 \\ x+2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$

a) Està definida i és contínua en tot $\mathbb{R}$.

b) Està definida i és contínua en $(-\infty, 5]$.

Les funcions donades mitjançant una expressió analítica senzilla (les que coneixem) són contínues on estan definides.

c) Està definida en tot $\mathbb{R}$. És contínua, també, en tot $\mathbb{R}$. L'únic punt en què hom dubta és el 3: les dues branques prenen el mateix valor per a $x = 3$.

$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \qquad 3 + 2 = 5$

Per tant, les dues branques enllacen en el punt (3, 5). La funció és també contínua en $x = 3$.

d) També les dues branques enllacen en el punt (2, 2). Per tant, la funció és contínua en l'interval en què està definida: [0, 5).

2 Límit d'una funció en un punt. Continuïtat

Pàgina 276

1 **Per a cada una de les funcions següents $f_1(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$, $f_2(x) = \dfrac{4}{3-x}$, $f_3(x) = 2^x$, completa en el quadern la taula adjunta, amb ajuda de la calculadora, i estima el valor de $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$.**

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)					

$f_1(x) = \dfrac{-5}{(x-3)^2}$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$\dfrac{-5}{(2-3)^2} = -5$	$\dfrac{-5}{(2,5-3)^2} = -20$	$\dfrac{-5}{(2,9-3)^2} = -500$	$\dfrac{-5}{(2,99-3)^2} = -50\,000$	$\dfrac{-5}{(2,999-3)^2} = -5\,000\,000$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_1(x) = -\infty$

$f_2(x) = \dfrac{4}{3-x}$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$\dfrac{4}{3-2} = 4$	$\dfrac{4}{3-2,5} = 8$	$\dfrac{4}{3-2,9} = 40$	$\dfrac{4}{3-2,99} = 400$	$\dfrac{4}{3-2,999} = 4\,000$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_2(x) = +\infty$

$f_3(x) = 2^x$

x	2	2,5	2,9	2,99	2,999
f(x)	$2^2 = 4$	$2^{2,5} = 5,66$	$2^{2,9} = 7,46$	$2^{2,99} = 7,94$	$2^{2,999} = 7,99$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f_3(x) = 8$

3 Càlcul de límits en un punt

Pàgina 278

1 Calcula raonadament el valor dels límits següents:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 0,1} \log_{10} x$

a) $-\dfrac{3}{2}$ b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) -1

Pàgina 279

Fes-ho tu. **La funció** $g(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 3, & x \neq -2 \\ 5, & x = -2 \end{cases}$ **, és contínua en** $x = -2$**?**

Troba el seu límit en 0 i en 4.

- Continuïtat en $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (x^3 - 5x + 3) = (-2)^3 - 5 \cdot (-2) + 3 = 5$$

$$f(-2) = 5$$

Per tant, la funció és contínua en $x = -2$.

- Límit en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^3 - 5x + 3) = 0^3 - 5 \cdot 0 + 3 = 3$$

- Límit en $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \lim_{x \to 4} (x^3 - 5x + 3) = 4^3 - 5 \cdot 4 + 3 = 47$$

Fes-ho tu. **Calcula** k **perquè** $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$ **sigui contínua en** $\mathbb{R}$**.**

Per a qualsevol valor de k la funció és contínua en tots els punts diferents de 3.

Estudiem la continuïtat en $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^3 - 2x + k) = 3^3 - 2 \cdot 3 + k = 21 + k$$

$$f(3) = 7$$

Perquè la funció sigui contínua en $x = 3$ ambdós resultats han de ser iguals; per tant:

$$21 + k = 7 \ \rightarrow \ k = -14$$

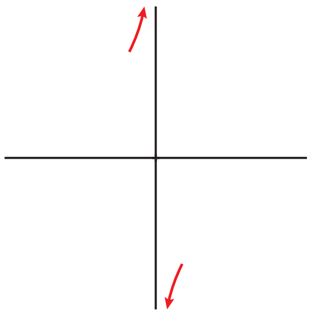
Pàgina 281

Fes-ho tu. Calcula a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-3}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x-3}{x^2}$; **c)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2}$ **i representa'n els resultats.**

a) El denominador s'anul·la en $x = 0$, però no el numerador. Per tant, el límit és infinit, amb signe més o menys.

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \to \frac{-0{,}01-3}{-0{,}01} = 301 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x} = +\infty$

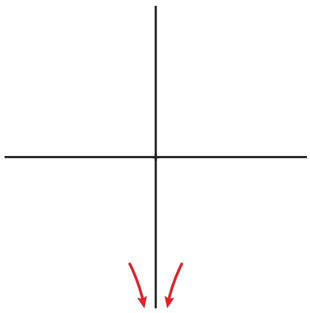
DRETA: $x = 0{,}01 \to \frac{0{,}01-3}{0{,}01} = -299 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x-3}{x} = -\infty$



b) El denominador s'anul·la en $x = 0$, però no el numerador. Per tant, el límit és infinit, amb signe més o menys.

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \to \frac{-0{,}01-3}{(-0{,}01)^2} = -30\,100 \to \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$

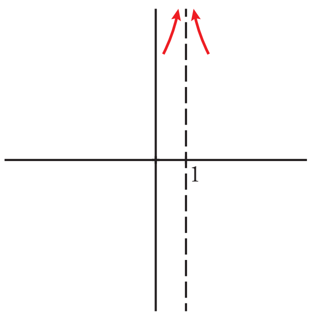
DRETA: $x = 0{,}01 \to \frac{0{,}01-3}{0{,}01^2} = -29\,900 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x-3}{x^2} = -\infty$



c) El denominador s'anul·la en $x = 1$, però no el numerador. Per tant, el límit és infinit, amb signe més o menys.

ESQUERRA: $x = 0{,}99 \to \frac{0{,}99^3}{(0{,}99-1)^2} = 9\,703 \to \lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$

DRETA: $x = 1{,}01 \to \frac{1{,}01^3}{(1{,}01-1)^2} = 10\,303 \to \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$



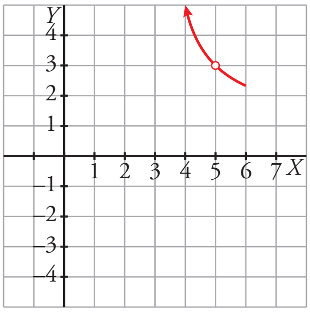
Fes-ho tu. **Calcula a)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15}$**; b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - 5x^2}{x^2}$ **i representa els resultats.**

a) Tant el numerador com el denominador s'anul·len en $x = 5$.

Simplifiquem la fracció:

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x+1}{x-3}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \to 5} \frac{x+1}{x-3} = 3$$



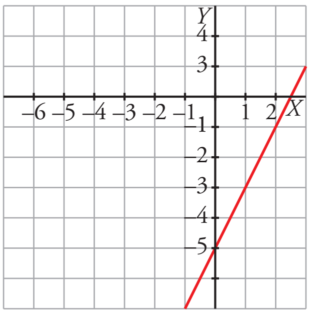
b) Tant el numerador com el denominador s'anul·len en $x = 0$.

Simplifiquem la fracció:

$$\frac{2x^3 - 5x^2}{x^2} = \frac{x^2(2x-5)}{x^2} = 2x - 5$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^3 - 5x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} (2x - 5) = -5$$

$y = 2x - 5$



Fes-ho tu. **Troba aquests límits i representa'n els resultats:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4}$

a) Tant el numerador com el denominador s'anul·len en $x = 1$.

Simplifiquem la fracció $\rightarrow \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = \dfrac{(x+5)(x-1)}{x(x-1)^2} = \dfrac{x+5}{x(x-1)}$

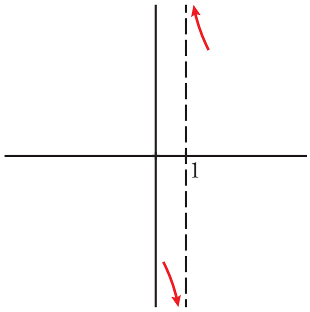
$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x+5}{x(x-1)}$ $\rightarrow$ Ara s'anul·la el denominador, però no el numerador. Per tant, els límits laterals són $\pm\infty$.

Estudiem el signe de la funció a un i a un altre costat d'1.

ESQUERRA: $x = 0{,}99 \rightarrow \dfrac{0{,}99^2 + 4 \cdot 0{,}99 - 5}{0{,}99^3 - 2 \cdot 0{,}99^2 + 0{,}99} = -605 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = -\infty$

DRETA $x = 1{,}01 \rightarrow \dfrac{1{,}01^2 + 4 \cdot 1{,}01 - 5}{1{,}01^3 - 2 \cdot 1{,}01^2 + 1{,}01} = 595 \rightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^3 - 2x^2 + x} = +\infty$

Per tant, el límit demanat no existeix.



b) Tant el numerador com el denominador s'anul·len en $x = 0$.

Simplifiquem la fracció $\rightarrow \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = \dfrac{x^2(x+3)}{x^4} = \dfrac{x+3}{x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+3}{x^2} \rightarrow$ Ara s'anul·la el denominador, però no el numerador. Per tant, els límits laterals són $\pm\infty$.

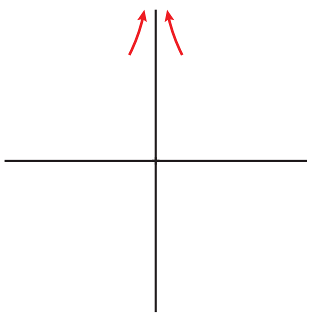
Estudiem la funció a un costat i a un altre de 0.

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \rightarrow \dfrac{(-0{,}01)^3 + 3 \cdot (-0{,}01)^2}{(-0{,}01)^4} = 29\,900 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = +\infty$

DRETA $x = 0{,}01 \rightarrow \dfrac{0{,}01^3 + 3 \cdot 0{,}01^2}{0{,}01^4} = 30\,100 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + 3x^2}{x^4} = +\infty$

Per tant, el límit d'aquesta funció quan $x \to 0$ és $+\infty$.

$y = \dfrac{x+3}{x^2}$

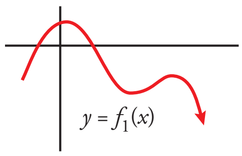


4 Límit d'una funció quan $x \to +\infty$

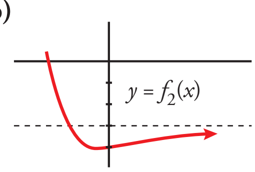
Pàgina 282

1 **Digues el límit quan $x \to +\infty$ de les següents funcions donades per les seves gràfiques:**

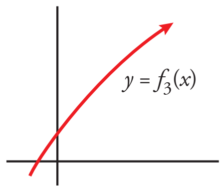
a)



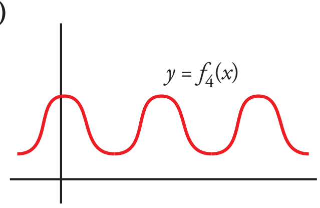
b)



c)



d)



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = -3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x)$ no existeix.

5 Càlcul de límits quan $x \to +\infty$

Pàgina 283

1 **Digues el valor del límit quan $x \to +\infty$ de les funcions següents:**

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$ **b)** $f(x) = 5x^3 + 7x$ **c)** $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **e)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$

d) 0 e) 0 f) $-\infty$

2 **Com que $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, troba un valor de x per al qual sigui $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$.**

Per exemple, per a $x = 1\,000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

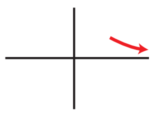
3 **Com que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 10x} = 0$, troba un valor de x per al qual sigui $\dfrac{1}{x^2 - 10x} < 0{,}0001$.**

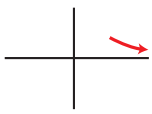
Per exemple, per a $x = 1\,000$, $f(x) = 0{,}0000\overset{\frown}{01}$.

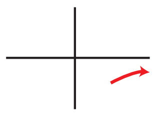
Pàgina 284

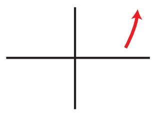
4 **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i representa'n les branques:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3}{x}$ **c)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ **d)** $f(x) = 3x - 5$

a) 0


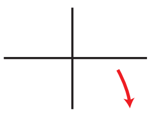
b) 0


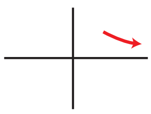
c) 0


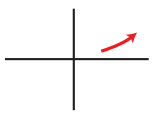
d) $+\infty$


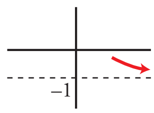
5 **Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i representa'n les branques:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{-5}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{1 + x^3}$

a) $-\infty$


b) 0


c) $+\infty$


d) -1


6 Límit d'una funció quan $x \to -\infty$

Pàgina 285

1 Troba els límits quan $x \to -\infty$ i quan $x \to +\infty$ de les funcions següents:

a) $f(x) = -2x^3 + 7x^2$ **b)** $f(x) = 3x^4 - 7x$ **c)** $f(x) = 10^x$

d) $f(x) = \sqrt{5x-8}$ **e)** $f(x) = \sqrt{-2x^2+1}$ **f)** $f(x) = -5^x$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-2x^3 + 7x^2) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 - 7x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (3x^4 - 7x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 3x^4 = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} 10^x = 0$, perquè per a $x = -10$, $10^{-10} = \dfrac{1}{10^{10}} = 0{,}0000000001$ i anàlogament passaria per a valors negatius de x més petits que -10.

De manera similar a l'anterior, podem comprovar que $\lim\limits_{x \to +\infty} 10^x = +\infty$.

d) El límit quan x tendeix a $-\infty$ no té sentit perquè la funció està definida per a $x \geq \dfrac{8}{5}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x-8} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{5x} = +\infty$ perquè el radicand tendeix a $+\infty$.

e) No té sentit calcular cap dels dos límits perquè el domini de definició de la funció és l'interval $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} -5^x = 0$, perquè per a $x = -10$, $-5^{-10} = -\dfrac{1}{5^{10}} = -0{,}0000001024$ i anàlogament passaria per a valors negatius de x més petits que -10.

De manera similar a l'anterior, podem comprovar que $\lim\limits_{x \to +\infty} -5^x = -\infty$.

2 Troba els límits quan $x \to -\infty$ i quan $x \to +\infty$ de les funcions següents:

a) $f(x) = \sqrt{3-x}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+3}{-x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{-x^3}{x^2+3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{5x^3-10}{3x^3+10x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$ perquè el radicand tendeix a $+\infty$.

El límit quan x tendeix a $+\infty$ no té sentit perquè la funció està definida només quan $x \leq 3$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+3}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+3}{-x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{-x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{-x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2+3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3}{x^2+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3}{3x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3-10}{3x^3+10x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^3}{3x^3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{3} = \dfrac{5}{3}$

7 Branques infinites. Asímptotes

Pàgina 287

1 Determina les asímptotes i la posició de cada corba respecte a aquestes:

a) $y = \dfrac{3x+1}{x-2}$ **b)** $y = \dfrac{3x^2-7}{x-2}$ **c)** $y = \dfrac{1}{x}$ **d)** $y = -\dfrac{1}{x^2}$ **e)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$

a) Com que el denominador s'anul·la quan $x = 2$, estudiem en aquest punt l'existència d'una asímptota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x+1}{x-2} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

ESQUERRA: $x = 1{,}99 \;\to\; \dfrac{3 \cdot 1{,}99+1}{1{,}99-2} = -697 \;\to\; \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x+1}{x-2} = -\infty$

DRETA: $x = 2{,}01 \;\to\; \dfrac{3 \cdot 2{,}01+1}{2{,}01-2} = 703 \;\to\; \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x+1}{x-2} = +\infty$

Per tant, la recta $x = 2$ és una asímptota vertical.

Vegem ara si té asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3 = 3$$

Per tant, la recta $y = 3$ és una asímptota horitzontal.

Per saber la posició de la corba respecte de l'asímptota horitzontal, hem de tenir en compte que $y = \dfrac{3x+1}{x-2} = 3 + \dfrac{7}{x-2}$.

Quan $x \to +\infty$ el quocient $\dfrac{7}{x-2}$ pren valors positius i la funció és per sobre de l'asímptota.

Quan $x \to -\infty$, passa el contrari i la funció és per sota de l'asímptota.

No té asímptotes obliqües perquè els límits en l'infinit de la funció no són infinits.

b) Com que el denominador s'anul·la quan $x = 2$, estudiem en aquest punt l'existència d'una asímptota vertical.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2-7}{x-2} = \frac{5}{0} = \pm\infty$$

ESQUERRA: $x = 1{,}99 \;\to\; \dfrac{3 \cdot 1{,}99^2-7}{1{,}99-2} = -488{,}03 \;\to\; \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{3x^2-7}{x-2} = -\infty$

DRETA: $x = 2{,}01 \;\to\; \dfrac{3 \cdot 2{,}01^2-7}{2{,}01-2} = 512{,}03 \;\to\; \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{3x^2-7}{x-2} = +\infty$

Per tant, la recta $x = 2$ és una asímptota vertical.

Vegem ara si té asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2-7}{x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 3x = -\infty$$

Per tant, no té asímptotes d'aquest tipus.

Ara estudiem les asímptotes obliqües:

$$y = \frac{3x^2-7}{x-2} = 3x + 6 + \frac{5}{x-2}$$

La recta $y = 3x + 6$ és una asímptota obliqua, ja que $\dfrac{5}{x-2}$ tendeix a 0 quan $x \to \pm\infty$.

Quan $x \to +\infty$, el quocient $\dfrac{5}{x-2}$ pren valors positius i la funció és per sobre de l'asímptota obliqua.

Quan $x \to -\infty$, passa el contrari i la funció és per sota de l'asímptota.

c) Com que el denominador s'anul·la quan $x = 0$, estudiem en aquest punt l'existència d'una asímptota vertical.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{1}{-0{,}01} = -100 \to \displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

DRETA: $x = 0{,}01 \to \dfrac{1}{0{,}01} = 100 \to \displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Per tant, la recta $x = 0$ és una asímptota vertical.

Vegem ara si té asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Per tant, la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal.

Quan $x \to +\infty$, la funció és positiva i està per sobre de l'asímptota horitzontal.

Quan $x \to -\infty$, la funció és negativa i és per sota de l'asímptota.

No té asímptotes obliqües perquè els límits en l'infinit de la funció no són infinits.

d) Com que el denominador s'anul·la quan $x = 0$, estudiem en aquest punt l'existència d'una asímptota vertical.

$\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{-x^2} = \frac{1}{0} = -\infty$ perquè la funció sempre pren valors negatius.

Per tant, la recta $x = 0$ és una asímptota vertical.

Vegem ara si té asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-x^2} = 0$$

Per tant, la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal.

Com que la funció sempre pren valors negatius, és per sota de l'asímptota horitzontal.

No té asímptotes obliqües perquè els límits en l'infinit de la funció no són infinits.

e) La funció està definida quan $x^2 - 9 > 0$; és a dir, quan $x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$. En els punts –3 i 3 es produeixen divisions entre 0. Ara estudiarem en aquests l'existència d'asímptotes, però només podrem calcular límits per un dels costats en cada punt.

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Perquè la funció sempre és positiva. Aleshores les rectes $x = -3$ i $x = 3$ són asímptotes verticals.

La recta $y = 0$ és clarament una asímptota horitzontal perquè $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0$.

Tant si $x \to +\infty$ com si $x \to -\infty$, la funció queda per sobre de l'asímptota horitzontal per prendre valors positius.

No té asímptotes obliqües perquè els límits en l'infinit de la funció no són infinits.

8 Branques infinites en les funcions racionals

Pàgina 289

1 Troba les branques infinites de les funcions següents i, a partir d'aquestes, perfila la forma de la corba:

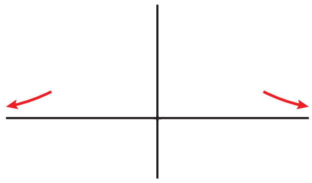
a) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ **c)** $y = \dfrac{x^4}{x^2+1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$

e) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ **f)** $y = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ **g)** $y = \dfrac{x^2+3x}{x+1}$ **h)** $y = \dfrac{2x^3-3x^2}{x}$

a) Asímptotes verticals: No en té, perquè el denominador no s'anul·la.

Branques en l'infinit: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$. Asímptota: $y = 0$

Com que la funció sempre és positiva, queda per sobre de l'asímptota.

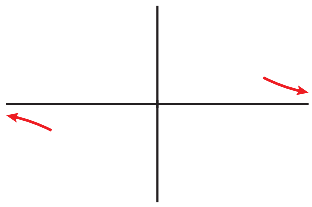


b) Asímptotes verticals: No en té, perquè el denominador no s'anul·la.

Branques en l'infinit: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$. Asímptota: $y = 0$

Estudiem el signe de la seva diferència amb l'asímptota:

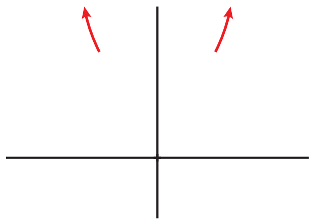
$$f(x) - 0 = \frac{x}{1+x^2} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



c) Asímptotes verticals: No en té, perquè el denominador no s'anul·la.

Branques en l'infinit: com que *grau de* $P(x)$ – *grau de* $Q(x) = 2$, té una branca parabòlica quan $x \to -\infty$ i una altra quan $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^4}{x^2+1} = +\infty \;\to\;$ Les branques parabòliques són cap amunt.



d) Asímptotes verticals. Obtenim les arrels del denominador:

$x^2 - 2x = 0 \;\to\; x_1 = 0,\; x_2 = 2$ són asímptotes perquè el numerador no s'anul·la en aquests valors.

Estudiem la posició de la corba respecte a aquestes:

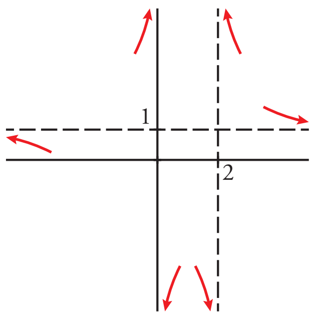
	PRÒXIM A $x = 0$		PRÒXIM A $x = 2$	
x	–0,01	0,01	1,99	2,01
$\dfrac{x^2+2}{x^2-2x}$	+	–	–	+

Branques en l'infinit:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+2}{x^2-2x} = 1$. Asímptota: $y = 1$.

Estudiem la posició de la corba respecte de l'asímptota:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2+2}{x^2-2x} - 1 = \frac{2+2x}{x^2-2x} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

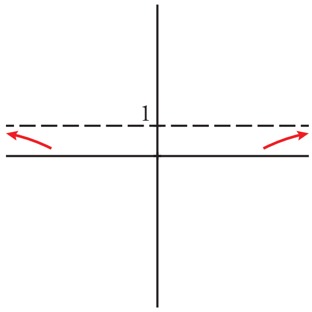


e) Asímptotes verticals: No en té perquè el denominador no s'anul·la.

Branques en l'infinit: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{1+x^2} = 1$. Asímptota: $y = 1$

Estudiem el signe de la seva diferència amb l'asímptota:

$$f(x) - 1 = \frac{-1}{1+x^2} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



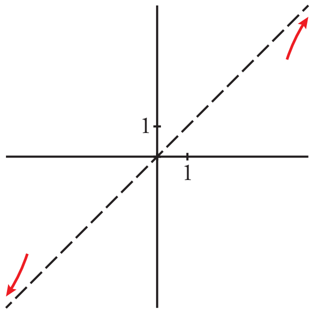
f) Asímptotes verticals: No en té perquè el denominador no s'anul·la mai.

Branques en l'infinit: com que *grau de* $P(x)$ – *grau de* $Q(x) = 1$, té una asímptota obliqua.

$$y = \frac{x^3}{1+x^2} = x - \frac{x}{x^2-1} \rightarrow \text{ La recta } y = x \text{ és l'asímptota.}$$

Estudiem la posició de la corba respecte de l'asímptota:

$$f(x) - x = \frac{-x}{x^2+1} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$



g) Asímptota vertical: $x = -1$ perquè s'anul·la el denominador i no el numerador.

Estudiem la seva posició:

ESQUERRA: $f(-1{,}01) = \dfrac{(-1{,}01)^2 + 3 \cdot (-1{,}01)}{-1{,}01+1} = 200{,}99$ (positiu)

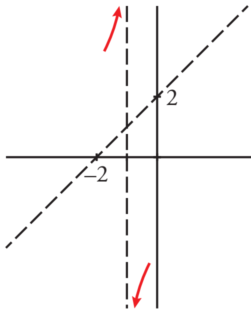
DRETA: $f(-0{,}99) = \dfrac{(-0{,}99)^2 + 3 \cdot (-0{,}99)}{-0{,}99+1} = -198{,}99$ (negatiu)

Branques en l'infinit: com que *grau de* $P(x)$ – *grau de* $Q(x) = 1$, té una asímptota obliqua.

$$y = \frac{x^2+3x}{x+1} = x + 2 - \frac{2}{x+1} \rightarrow \text{ La recta } y = x + 2 \text{ és l'asímptota.}$$

Estudiem la posició de la corba respecte de l'asímptota:

$$f(x) - (x+2) = \frac{-2}{x+1} \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

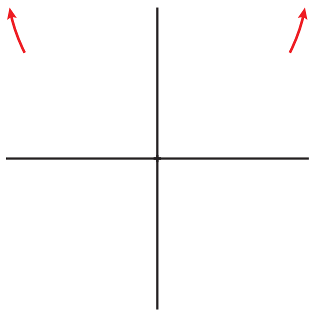


h) Asímptota vertical. El valor $x = 0$ anul·la el denominador però també el numerador. Si $x \neq 0$ podem simplificar la fracció:

$$\frac{2x^3 - 3x^2}{x} = 2x^2 - 3x$$

Per tant, la funció donada coincideix amb una paràbola excepte en el punt $x = 0$, on té una discontinuïtat del tipus III, ja que no està definida.

No té asímptota vertical i les branques en l'infinit són parabòliques (ambdues cap amunt).

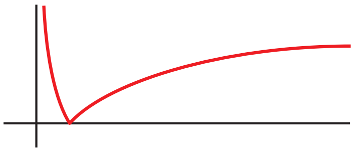


9 Branques infinites en les funcions trigonomètriques, exponencials i logarítmiques

Pàgina 290

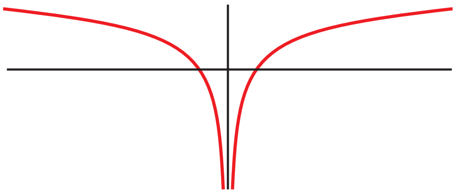
1 **Cert o fals?**

a) La funció $y = |log_2 x|$ es representa així:



Té dues branques infinites: una asímptota vertical en $y = 0$ i una branca parabòlica quan $x \to +\infty$.

b) La funció $y = log_2 |x|$ es representa així:



Té una asímptota vertical en $x = 0$ i cada una de les branques parabòliques en $-\infty$ i en $+\infty$.

a) Cert.

b) Cert.

Exercicis i problemes resolts

Pàgina 291

2. Límits i continuïtat d'una funció definida «a trossos»

Fes-ho tu. **Troba el límit de la funció $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{si } x<3 \\ x-2, & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ en $x = 0$ i en $x = 3$. Estudia'n la continuïtat.**

En $x = 0$, com que $0 < 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2x-3) = -3$

$x = 3$ és un punt de ruptura. Per això, calculem els límits laterals:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x-3) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x-2) = 1 \end{cases} \to \text{No coincideixen; per tant, no existeix el límit.}$$

Aquesta funció és discontínua en $x = 3$, perquè el límit en aquest punt no existeix. Té un salt finit en aquest punt. Per als altres valors de x, la funció és contínua perquè està formada per trossos de rectes.

3. Càlcul del límit en un punt

Fes-ho tu. **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-2x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-2x} = \dfrac{0}{0}$. Indeterminació. Hem de simplificar la fracció.

$$\frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x} = \frac{(x-1)^2}{2x(x-1)} = \frac{x-1}{2x}; \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2-2x} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{2x} = 0$$

b) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x}{(x+2)^2} = \dfrac{-2}{0} = -\infty$ perquè el denominador sempre és positiu i el numerador sempre és negatiu en les proximitats del punt $x = -2$. (En aquest cas no són necessaris els límits laterals).

Pàgina 292

4. Funció contínua en un punt

Fes-ho tu. **Troba el valor de k perquè la funció $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{si } x \le 1 \\ x+k & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sigui contínua en tot $\mathbb{R}$.**

La funció és contínua si $x \ne 1$ perquè està formada per dos trossos de rectes.

Estudiem la continuïtat en el punt de ruptura $x = 1$:

$$f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} (2x-5) = -3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} (x+k) = 1+k \end{cases}$$

Perquè existeixi el límit ha de ser $-3 = 1 + k \to k = -4$

Si $k = -4$ es compleixen totes les condicions perquè sigui contínua en $x = 1$ i, per tant, en tot $\mathbb{R}$.

5. Càlcul de límits quan $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$

Fes-ho tu. Calcula $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ en els casos següents:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ perquè el radicand és tan gran com vulguem donant a x valors molt grans.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^2 - 1} = +\infty$ per una raó anàloga a l'anterior.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - 1}{3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2}{-2x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{-2} = -2$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x - 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x - 5} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5x + 3}{x^2 - 2} = 0$ perquè el grau del numerador és més petit que el del denominador.

Pàgina 293

6. Branques infinites i asímptotes

Fes-ho tu. Estudia les asímptotes de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 2}$

a) • Asímptotes verticals:

$x - 2 = 0 \to x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 1}{x - 2} = \dfrac{5}{0} = \pm\infty \to x = 2$ és una asímptota vertical.

Si $x \to 2^-$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $\left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

• Asímptotes horitzontals:

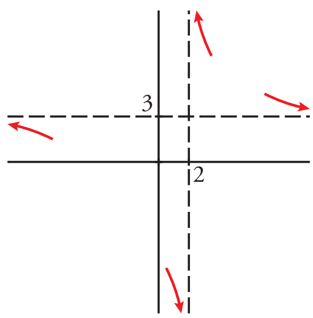
$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3x - 1}{x - 2} = 3$; $y = 3$ és una asímptota horitzontal.

Estudiem la posició de la corba:

$f(x) - 3 = \dfrac{3x - 1}{x - 2} - 3 = \dfrac{5}{x - 2}$

Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 > 0$. La corba és sobre l'asímptota.

Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 < 0$. La corba és sota l'asímptota.



b) • Asímptotes verticals:

No en té perquè el seu denominador mai no s'anul·la.

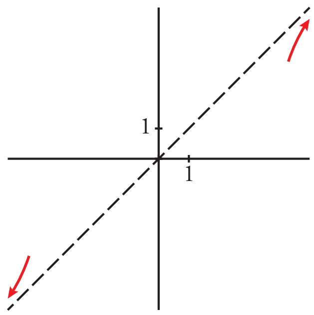
• Asímptotes horitzontal i obliqua:

Com que el grau del numerador és una unitat més gran que el del denominador, hi ha asímptota obliqua. Dividint obtenim:

$\frac{x^3}{x^2+2} = x - \frac{2x}{x^2+2} \;\rightarrow\; y = x$ és asímptota obliqua.

Estudiem la posició:

$$d = f(x) - y = -\frac{2x}{x^2+2} \begin{cases} \text{Si } x \rightarrow +\infty \;\; (d<0) \;\; f(x) < y \\ \text{Si } x \rightarrow -\infty \;\; (d>0) \;\; f(x) > y \end{cases}$$



Exercicis i problemes guiats

Pàgina 294

1. Límits d'una funció definida «a trossos»

Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 3x - 5 & \text{si } 0 \le x < 4 \\ 9x - x^2 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$$

troba $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ***i*** $\lim_{x \to 0} f(x)$.

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (9x - x^2) = -\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- Com que $x = 0$ és un punt de ruptura, hem de calcular-ne els límits laterals:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (3x - 5) = -5$$

El límit en $x = 0$ no existeix.

2. Límits en l'infinit

Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$ *b)* $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x}}{x + 1}$ *c)* $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x - 2}}$

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$ perquè el numerador té grau 1 i el denominador també, ja que $\sqrt{x^2} = x$.

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{3x}}{x + 1} = 0$ perquè el grau del numerador seria $\frac{1}{2}$ i és més petit que el grau del denominador, que és 1.

c) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x - 2}} = +\infty$ perquè el radicand tendeix a $+\infty$ en ser un quocient de polinomis en què el grau del numerador és més gran que el del denominador.

3. Asímptota obliqua

Troba a, b i c en $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x - c}$ ***perquè tingui com a asímptotes*** $x = 2$ ***i*** $y = 2x - 1$.

Perquè $x = 2$ sigui una asímptota vertical, el denominador s'ha d'anul·lar en aquest punt.

$2 - c = 0 \rightarrow c = 2$

Aleshores $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x - 2}$

Dividim els polinomis per calcular l'asímptota obliqua:

$$\frac{ax^2 + bx}{x - 2} = ax + 2a + b + \frac{4a + 2b}{x - 2}$$

Per tant, $\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \rightarrow a = 2,\ b = -5$

4. Branques infinites

Estudia i representa les branques infinites de les funcions següents:

a) $f(x) = 1{,}5^x$ ***b)*** $f(x) = 0{,}4^x$ ***c)*** $f(x) = \ln(2x - 4)$

a) • Asímptotes verticals: No cal que sigui contínua.

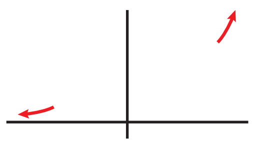
• Asímptotes horitzontals:

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1{,}5^x = +\infty$ perquè és una funció exponencial amb base més gran que 1.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 1{,}5^x = 0$ pel mateix motiu.

Aleshores $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$.

Té una branca parabòlica quan $x \to +\infty$.



b) • Asímptotes verticals: No cal que sigui contínua.

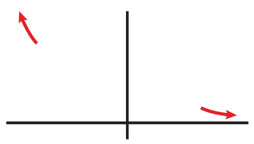
• Asímptotes horitzontals:

$\lim\limits_{x \to +\infty} 0{,}4^x = 0$ perquè és una funció exponencial amb base més petita que 1.

$\lim\limits_{x \to -\infty} 0{,}4^x = +\infty$ pel mateix motiu.

Aleshores $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$.

Té una branca parabòlica quan $x \to -\infty$.



c) El domini de definició de la funció és l'interval $(2, +\infty)$, ja que s'ha de complir que $2x - 4 > 0$.

En el domini és una funció contínua i no té asímptotes verticals.

Estudiem el comportament a prop del punt $x = 2$ per la dreta. Podem veure-ho avaluant alguns punts:

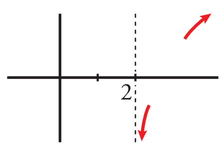
$x = 2{,}001 \;\to\; \ln(2 \cdot 2{,}001 - 4) = -6{,}2$

$x = 2{,}0001 \;\to\; \ln(2 \cdot 2{,}0001 - 4) = -8{,}5$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \ln(2x - 4) = -\infty$

Aleshores, $x = 2$ és una asímptota vertical quan $x \to 2^+$.

Té una branca parabòlica en l'infinit de creixement cada cop més lent cap amunt pel fet de ser una funció logarítmica i $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x - 4) = +\infty$.



5. Existència d'asímptotes

Té alguna asímptota la funció següent?

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3}$$

Quina relació hi ha entre la seva gràfica i la de $g(x) = x^2 - 4$?

- Asímptotes verticals:

  Estudiem el comportament de la funció en $x = 3$, punt que anul·la el denominador.

  $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \frac{0}{0}$. Indeterminació. Hem de simplificar la fracció:

  $$\frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \frac{(x-3)(x^2-4)}{x-3} = x^2 - 4$$

  Aleshores, $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 4) = 5$

  Per tant, en el punt $x = 3$ no té asímptota vertical. En aquest punt hi ha una discontinuïtat del tipus III.

- Branques en l'infinit:

  Si $x \neq 2 \rightarrow f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x - 3} = x^2 - 4 = g(x)$

  Aleshores la funció és una paràbola excepte en el punt $x = 2$, on no està definida.

  Té dues branques parabòliques cap amunt quan $x \rightarrow -\infty$ i $x \rightarrow +\infty$, ja que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$.

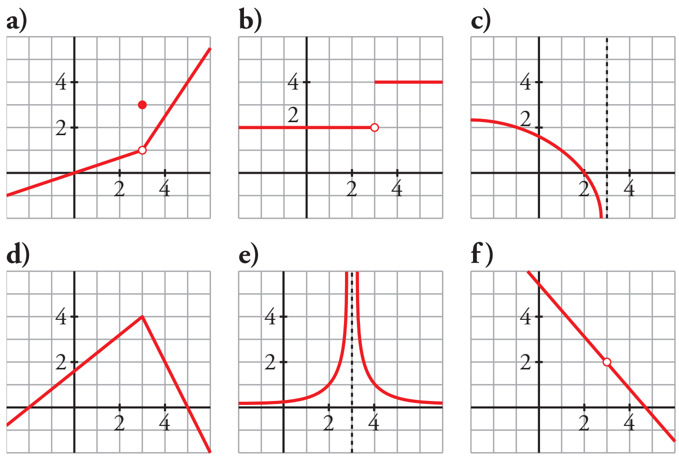
Exercicis i problemes proposats

Pàgina 295

Per practicar

Continuïtat i límit en un punt

1 **Quina d'aquestes funcions és continua en $x = 3$? Assenyala, en cada una de les altres, la raó de la discontinuïtat:**



a) Discontinuïtat de tipus IV en $x = 3$, perquè el valor de la funció no coincideix amb el límit en el punt.

b) Discontinuïtat de salt finit (tipus II). La funció existeix en $x = 3$, però els límits laterals, encara que existeixen, són diferents.

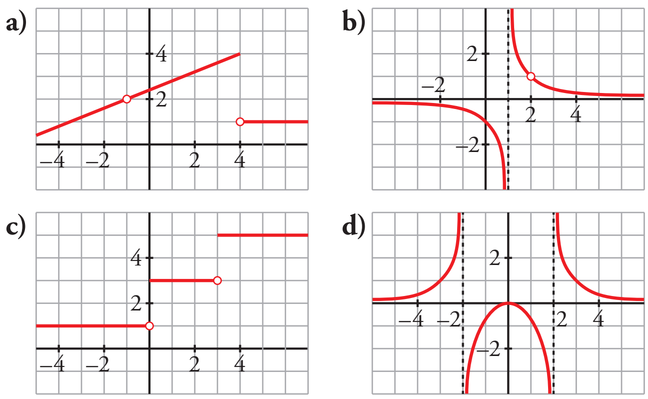
c) Discontinuïtat de salt infinit (tipus I). Té un asímptota vertical per l'esquerra en $x = 3$.

d) Contínua.

e) Discontinuïtat de salt infinit (tipus I). Té una asímptota vertical en $x = 3$.

f) Discontinuïtat de tipus III. La funció no està definida en $x = 3$, però existeix el límit en aquest punt.

2 **Cada una de les funcions següents té un o més punts on no és contínua. Indica quins són aquests punts i el tipus de discontinuïtat:**



a) Discontinuïtat de tipus III en $x = -1$.

Discontinuïtat de salt finit en $x = 4$ (tipus II).

b) Discontinuïtat de salt infinit en $x = 1$ (tipus I).

Discontinuïtat de tipus III en $x = 2$.

c) Discontinuïtats de salt finit en $x = 0$ i $x = 3$ (tipus II).

d) Discontinuïtats de salt infinit en $x = -2$ i $x = 2$ (tipus I).

3 **Comprova que només una de les funcions següents és contínua en $x = 1$. Explica la raó de la discontinuïtat en les altres:**

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x<1 \\ 3 & \text{si } x>1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x\neq 1 \\ -1 & \text{si } x=1 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x<1 \\ x-3 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

a) La funció no està definida en $x = 1$. Per altra banda:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (x+2) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 3 = 3 \end{cases} \quad \text{Aleshores existeix } \lim_{x\to 1} f(x) = 3$$

Per tant, té una discontinuïtat de tipus III en $x = 1$.

b) $f(1) = -1$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} 2x = 2$$

En aquest cas, té una discontinuïtat de tipus IV.

c) $f(1) = 1 - 3 = -2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} -2 = -2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x-3) = -2 \end{cases}$$

Aquesta funció és contínua en $x = 1$.

d) La funció no està definida en $x = 1$.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

• Si $x \to 1^-$ $\left(f(x) = \frac{+}{-} = -\right)$ $f(x) \to -\infty$

• Si $x \to 1^+$ $\left(f(x) = \frac{+}{+} = +\right)$ $f(x) \to +\infty$

La funció té una discontinuïtat de salt infinit (tipus I) en $x = 1$.

4 **Indica per a quins valors de $\mathbb{R}$ són contínues les funcions següents:**

a) $y = \sqrt{x^2+2}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x^4+3x^3}$ **c)** $y = \sqrt{5-2x}$

d) $y = \ln(x+4)$ **e)** $y = 2^{3-x}$ **f)** $y = |x-5|$

a) Contínua en $\mathbb{R}$.

El seu domini de definició és $\mathbb{R}$ i la seva expressió analítica és elemental.

b) Vegem si s'anul·la el denominador de la fracció:

$x^4 + 3x^3 = 0 \;\rightarrow\; x^3(x+3) = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = -3$

La funció és contínua en el seu domini de definició; és a dir, en $\mathbb{R} - \{-3, 0\}$.

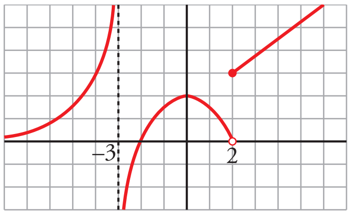
c) Per calcular el seu domini resolem $5 - 2x \geq 0$. L'interval solució $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right]$ és el conjunt de valors en els quals la funció és contínua.

d) L'expressió analítica d'aquesta funció és elemental; per tant, és contínua en $(-4, +\infty)$, el seu domini.

e) Anàlogament al cas anterior, és contínua en $\mathbb{R}$ perquè sempre està definida.

f) És contínua en $\mathbb{R}$ perquè sempre està definida i la seva expressió analítica és elemental.

5 **Sobre la gràfica de la funció següent $f(x)$, troba:**



a) $\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

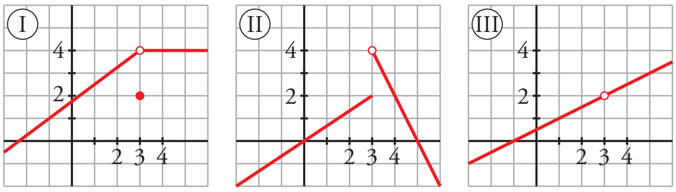
d) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ **e)** $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ **f)** $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2

d) 0 e) 3 f) 0

6 **Relaciona cada una d'aquestes expressions amb la gràfica corresponent:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 4$ **c)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **no existeix**



a) III b) I c) II

Alguna és contínua en $x = 3$?

No n'hi ha cap que sigui contínua en $x = 3$.

7 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1-x}{x-2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0,5} 2^x$

e) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt{10 + x - x^2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 4} \log_2 x$ **g)** $\lim\limits_{x \to 0} \cos x$ **h)** $\lim\limits_{x \to 2} e^x$

a) 5 b) 0 c) –2 d) $\sqrt{2}$

e) 2 f) 2 g) 1 h) e^2

8 **Donada la funció** $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, **troba:**

a) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

a) 5

b) 4

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

9 **Comprova si les funcions següents són contínues en els punts que s'indiquen:**

a) $f(x) = \begin{cases} 3-x & \text{si } x<-1 \\ x^2+3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$ en $x=-1$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<1 \\ 2^{x-1} & \text{si } x>1 \end{cases}$ en $x=1$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x} & \text{si } x<0 \\ x-2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ en $x=0$

d) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x<2 \\ 2x-6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x=2$

e) $f(x) = \begin{cases} 5-x & \text{si } x<3 \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ en $x=3$

Tots els punts analitzats són punts de ruptura; aleshores els límits en aquests s'estudien mitjançant els límits laterals.

a) $f(-1) = (-1)^2 + 3 = 4$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (3-x) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+3) = 4 \end{cases}$$ La funció és contínua en $x = -1$.

b) $f(1)$ no està definit.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} 2^{x-1} = 1 \end{cases}$$ La funció té una discontinuïtat del tipus III en $x = 1$.

c) $f(0) = 0 - 2 = -2$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{4-x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} (x-2) = -2 \end{cases}$$ La funció té una discontinuïtat de salt finit (tipus II) en $x = 0$.

d) $f(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} (2-x^2) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} (2x-6) = -2 \end{cases}$$ La funció és contínua en $x = 2$.

e) $f(3) = \dfrac{2}{3-2} = 2$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} (5-x) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{2}{x-2} = 2 \end{cases}$$ La funció és contínua en $x = 3$.

Pàgina 296

10 **Aquestes funcions, són discontínues en algun punt?:**

a) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x<1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq -1 \\ -1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x} & \text{si } x<2 \\ x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-3} & \text{si } x<3 \\ \sqrt{x-3} & \text{si } x>3 \end{cases}$

a) La funció és formada per un tros de paràbola i un altre de recta; aleshores l'únic punt possible de discontinuïtat seria el punt de ruptura. Estudiem la continuïtat en aquest punt.

$f(1) = 1 - 1 = 0$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} (x-1) = 0 \end{cases}$$

La funció també és contínua en $x = 1$; per tant, no és discontínua en cap punt.

b) Aquesta funció coincideix amb la paràbola $y = x^2$ excepte en el punt $x = -1$. Aleshores té una discontinuïtat de tipus IV en aquest punt.

c) La funció està formada per un tros d'hipèrbola i un altre de recta; aleshores l'únic punt possible de discontinuïtat seria el punt de ruptura. Estudiem la continuïtat en aquest punt.

$f(2) = 2$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} x = 2 \end{cases}$$

La funció també és contínua en $x = 2$; per tant, no té discontinuïtats.

d) La funció és formada per dos trossos de funcions les expressions analítiques de les quals són elementals (correctament definides); per tant, l'únic punt possible de discontinuïtat seria el punt de ruptura. Estudiem la continuïtat en aquest punt.

$f(3)$ no està definit.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 2^{x-3} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = 0 \end{cases}$$ En el punt $x = 3$ hi ha una discontinuïtat de salt finit (tipus II).

11 **Donada la funció $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$ calcula'n:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$

a) Com que $0 < 3$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$.

b) $x = 3$ és el punt de ruptura. Utilitzarem límits laterals.

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 2x = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{0}{0} \end{cases} \longrightarrow \text{Indeterminació.}$$

Per calcular el límit per la dreta necessitem simplificar la fracció:

$$\frac{x^2-9}{x^2-3x} = \frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x \to 3^+} \frac{x+3}{x} = 2$$

Aleshores els límits laterals són diferents i $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ no existeix.

c) Com que $5 > 3$, $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-9}{x^2-3x} = \dfrac{8}{5}$.

12 **En la funció $f(x) = \begin{cases} x^2-2 & \text{si } x < -1 \\ 3x-1 & \text{si } -1 \le x < 4 \\ 4\sqrt{x}+3 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$ troba'n:**

a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x \to 9} f(x)$

a) $x = -1$ és un punt de ruptura. Utilitzarem límits laterals per calcular el límit:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2-2) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} (3x-1) = -4 \end{cases}$$ Per tant, no existeix el límit.

b) $x = 4$ és un punt de ruptura. Utilitzarem límits laterals per calcular el límit:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} (3x-1) = 11 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} (4\sqrt{x}+3) = 11 \end{cases} \quad \text{Per tant,} \quad \lim_{x\to 4} f(x) = 11$$

c) Com que $9 > 4$, $\lim\limits_{x\to 9} f(x) = \lim\limits_{x\to 9} (4\sqrt{x}+3) = 15$

13 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x^2-2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+3x}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+x}$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$ f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x^2-2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x}{x(x-2)} = -2$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2+3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(2x+3)}{x} = 3$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)} = \dfrac{3}{-1} = -3$

e) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\dfrac{1}{4}$

f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

g) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{x^2+4x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\dfrac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} = 2$

14 **Resol els límits següents i representa els resultats que obtinguis:**

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x-1}$

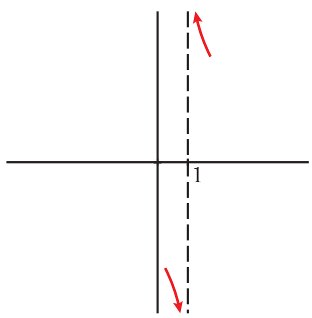
b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x}{x^2}$

c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2}{x^2+2x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^4-10x^2}$

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2}{x-1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

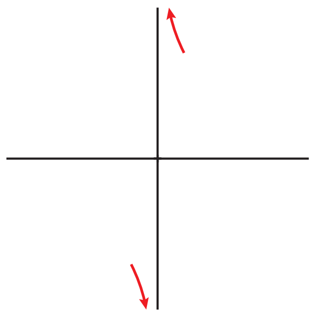
- Si $x \to 1^- \to \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\ f(x) \to -\infty$
- Si $x \to 1^+ \to \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\ f(x) \to +\infty$



b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^2} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

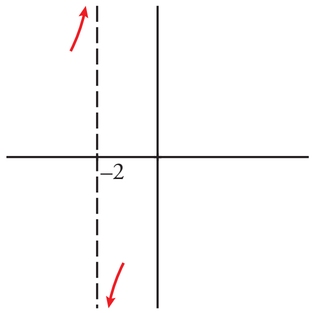
$\dfrac{x^2 + x}{x^2} = \dfrac{x(x+1)}{x^2} = \dfrac{x+1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{1}{0} = \infty$

- Si $x \rightarrow 0^- \;\rightarrow\; \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\; f(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \rightarrow 0^+ \;\rightarrow\; \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\; f(x) \rightarrow +\infty$



c) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2}{x^2 + 2x} = \dfrac{4}{0} = \pm\,\infty$

- Si $x \rightarrow -2^- \;\rightarrow\; \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = +\right)\; f(x) \rightarrow +\infty$
- Si $x \rightarrow -2^+ \;\rightarrow\; \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = -\right)\; f(x) \rightarrow -\infty$



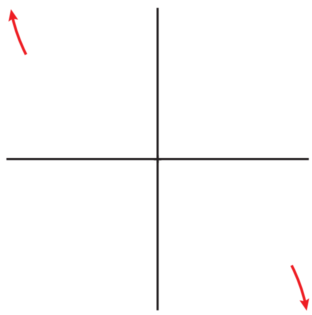
d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

$\dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \dfrac{x^3}{x^2(x^2 - 10)} = \dfrac{x}{x^2 - 10}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^4 - 10x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 - 10} = 0$

$f(0)$ no està definit.

Si $x < 0,\; f(x) > 0$ i si $x > 0,\; f(x) < 0$



15 **Calcula els límits següents i representa els resultats que obtinguis:**

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

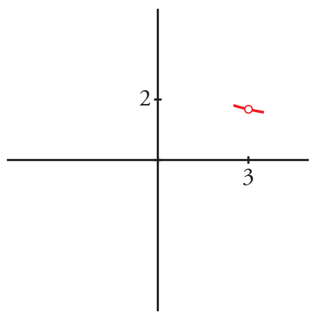
d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

$\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \dfrac{(x+2)(x-3)}{x(x-3)} = \dfrac{x+2}{x}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x+2}{x} = \dfrac{5}{3}$

Donant a x valors pròxims a 3, podem esbrinar com s'acosta per tots dos costats.

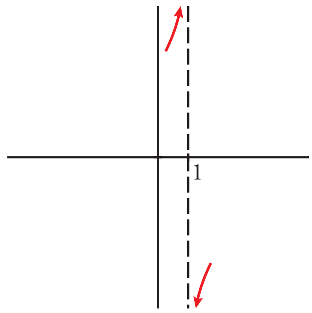


b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

Simplifiquem: $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x-2}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x-1} = \infty$

- Si $x \rightarrow 1^- \;\rightarrow \left(f(x) = \dfrac{-}{-} = + \right)\; f(x) \rightarrow +\infty$
- Si $x \rightarrow 1^+ \;\rightarrow \left(f(x) = \dfrac{-}{+} = - \right)\; f(x) \rightarrow -\infty$

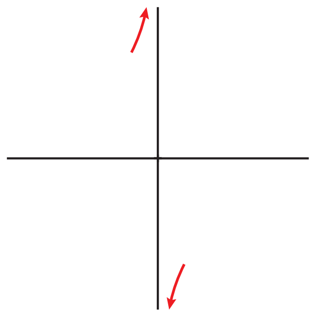


c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

$\dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2} = \dfrac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \dfrac{x-2}{x(x+1)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x^3+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-2}{x(x+1)} = \dfrac{-2}{0} = \pm\infty$

- Si $x \rightarrow 0^- \;\rightarrow \left(f(x) = \dfrac{-}{-} = + \right)\; f(x) \rightarrow +\infty$
- Si $x \rightarrow 0^+ \;\rightarrow \left(f(x) = \dfrac{-}{+} = - \right)\; f(x) \rightarrow -\infty$

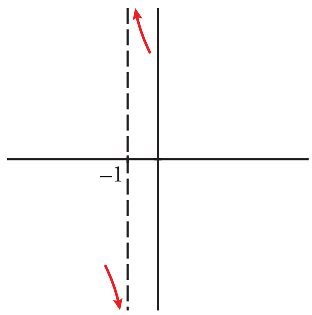


d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

$\dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1} = \dfrac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2}{x+1}$

$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2}{x+1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

- Si $x \rightarrow -1^- \;\rightarrow \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = - \right)\; f(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \rightarrow -1^+ \;\rightarrow \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = + \right)\; f(x) \rightarrow +\infty$

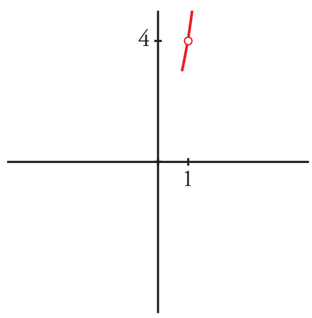


e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

$\dfrac{x^4-1}{x-1} = \dfrac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x-1)} = \dfrac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x-1} = (x^2+1)(x+1)$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} [(x^2+1)(x+1)] = 4$

Donant a x valors pròxims a 1, podem esbrinar com s'acosta per tots dos costats.

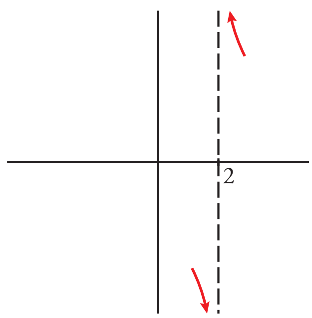


f) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4} = \dfrac{0}{0} \;\rightarrow$ Indeterminació.

$\dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{2(x+2)}{x-2}$

$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-8}{x^2-4x+4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2(x+2)}{x-2} = \dfrac{8}{0} = \pm\infty$

- Si $x \rightarrow 2^- \;\rightarrow \left(f(x) = \dfrac{+}{-} = - \right)\; f(x) \rightarrow -\infty$
- Si $x \rightarrow 2^+ \;\rightarrow \left(f(x) = \dfrac{+}{+} = + \right)\; f(x) \rightarrow +\infty$



16 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{7-5x}{x^2+1}\right)^{2-5x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\dfrac{3x+4}{x^2+1}\right)^5$ **c)** $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{e^{\sin x}}{1+\cos x}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 10} \log\,(2\sqrt{3x-5})^3$

a) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{7-5x}{x^2+1}\right)^{2-5x} = \left(\dfrac{7-5\cdot 1}{1^2+1}\right)^{-3} = 1$

b) $\lim\limits_{x \to 2} \log_2 \left(\dfrac{3x+4}{x^2+1}\right)^5 = \log_2 \left(\dfrac{3\cdot 2+4}{2^2+1}\right)^5 = 5$

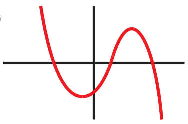
c) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{e^{\sin x}}{1+\cos x} = \dfrac{e^{\sin \pi/2}}{1+\cos \pi/2} = e$

d) $\lim\limits_{x \to 10} \log\,(2\sqrt{3x-5})^3 = \log\,(2\sqrt{3\cdot 10-5})^3 = 3$

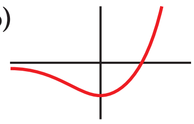
Límit quan $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$

17 **Determina quin és el límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$ en les gràfiques següents:**

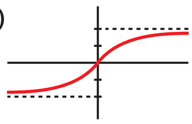
a)



b)



c)



a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$

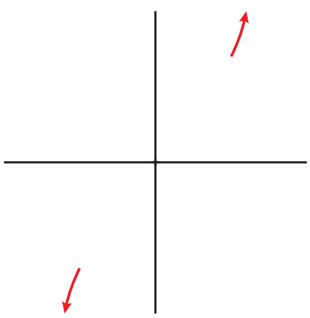
18 **Calcula el límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$ de cada una de les funcions següents.**
Representa els resultats que obtinguis.

a) $f(x) = x^3 - 10x$ **b)** $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ **c)** $f(x) = 7 - 3x$ **d)** $f(x) = -x^2 + 8x + 9$

e) $f(x) = 1 - (x-2)^2$ **f)** $f(x) = 7x^2 - x^3$ **g)** $f(x) = (5-x)^2$ **h)** $f(x) = (x+1)^3 - 2x^2$

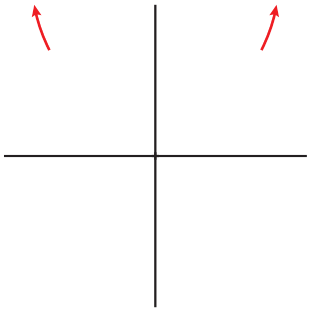
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 10x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 10x) = -\infty$



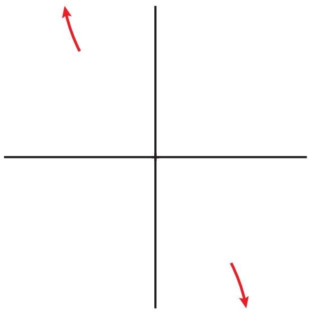
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 4} = +\infty$



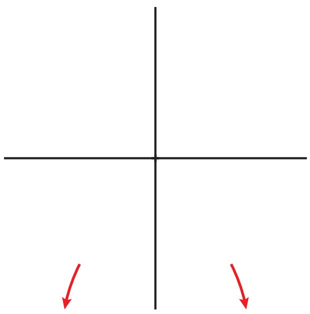
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7 - 3x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7 - 3x) = +\infty$



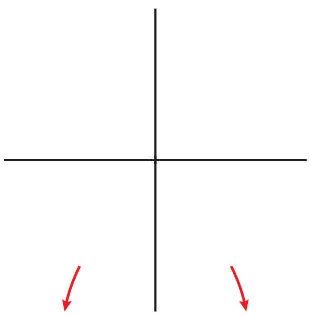
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 8x + 9) = -\infty$



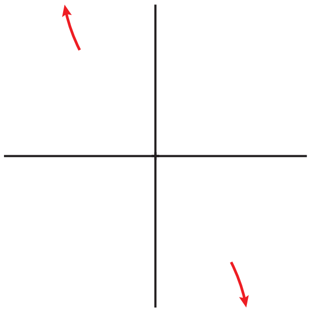
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [1 - (x - 2)^2] = -\infty$



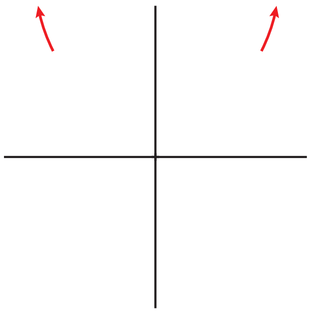
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} (7x^2 - x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (7x^2 - x^3) = +\infty$



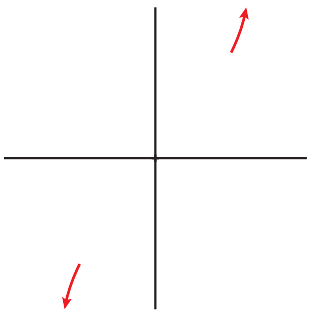
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x)^2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5 - x)^2 = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [(x + 1)^3 - 2x^2] = -\infty$



19 Calcula aquests límits i representa les branques que obtinguis:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{(x-1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x^2-1}$ **d)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+2}$ **f)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+5}{1-x}$

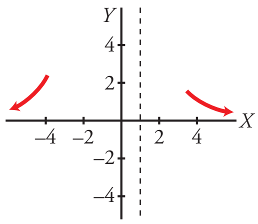
g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-3x}{x+3}$ **h)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3-2x}{5-2x}$

Resolt en l'exercici següent.

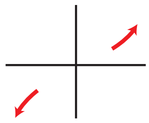
20 **Calcula el límit de totes les funcions de l'exercici anterior quan $x \to -\infty$.**

Resolució dels exercicis 19 i 20:

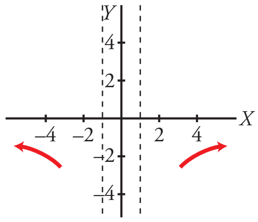
a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$$



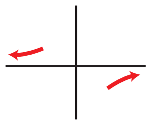
b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = -\infty$$



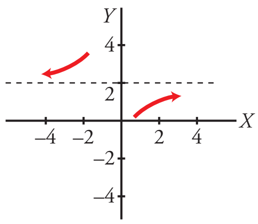
c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$$



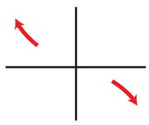
d) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$$



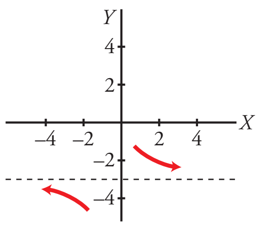
e) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$$



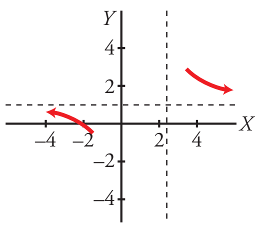
f) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+5}{1-x} = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+5}{1-x} = +\infty$$



g) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-3x}{x+3} = -3 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{2-3x}{x+3} = -3$$



h) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = 1 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x}{5-2x} = 1$$



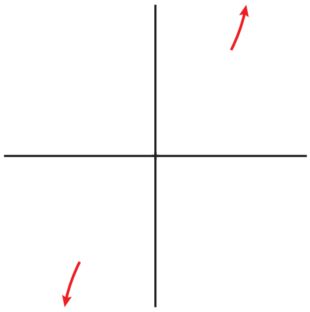
21 **Calcula el límit quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$ i representa'n els resultats.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x-1)^2}$ c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-10}$ d) $f(x) = \dfrac{1-12x^2}{3x^2}$

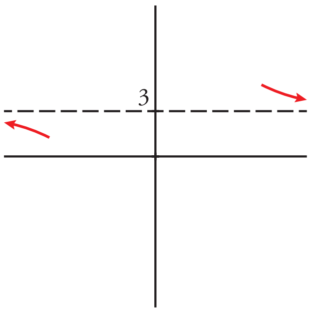
e) $f(x) = \dfrac{5-2x}{x^2+1}$ f) $f(x) = \dfrac{1-x}{(2x+1)^2}$ g) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2}$ h) $f(x) = \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9}$

Per calcular aquests límits, hem de tenir en compte la regla dels graus del numerador i del denominador.

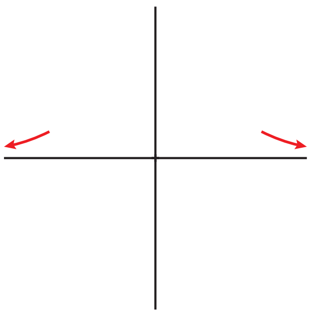
a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty$



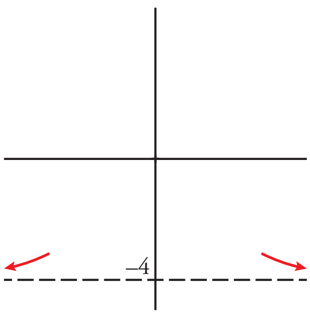
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2}{(x-1)^2} = 3$



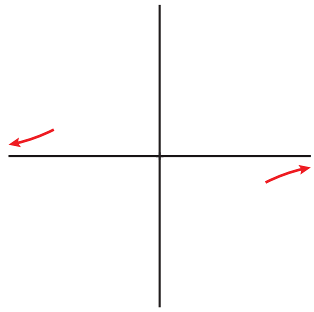
c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2-10} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2-10} = 0$



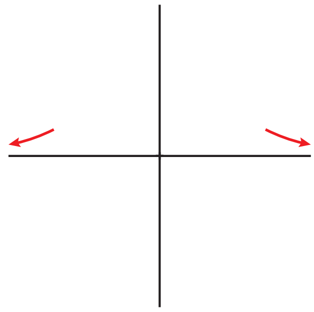
d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-12x^2}{3x^2} = -4$



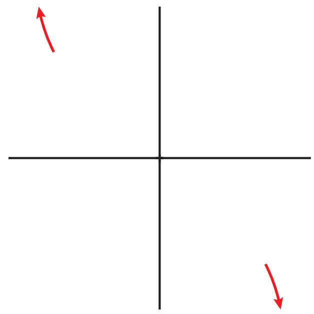
e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5-2x}{x^2+1} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{5-2x}{x^2+1} = 0$



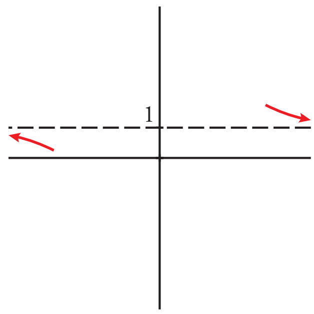
f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-x}{(2x+1)^2} = 0$



g) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2} = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3-x^2}{7-x^2} = +\infty$



h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2+4x-9} = 1$



22 **Digues quin és el límit de les funcions següents quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$:**

a) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2}{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (5 - x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (3 - x) = +\infty$

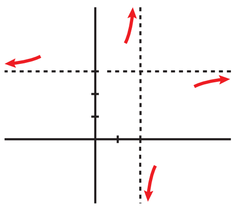
23 **Digues quin és el límit d'aquestes funcions quan $x \to +\infty$:**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{-3}{x^2 + 2x - 4}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ **d)** $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x^2}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{x^2 + 2x - 4} = 0$ c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}} = 0$ d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 3$

Pàgina 297

Asímptotes

24 

Aquest gràfic mostra la posició de la corba $y = f(x)$ respecte de les seves asímptotes.

Digues quines són aquestes i descriu-ne la posició.

- Asímptota vertical: $x = 2$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

- Asímptota horitzontal: $y = 3$

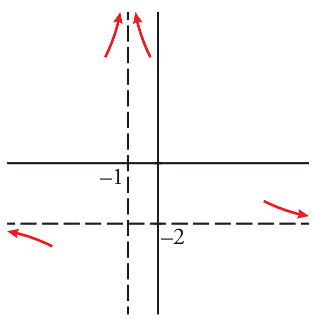
  Si $x \to -\infty$, $f(x) - 3 > 0$

  Si $x \to +\infty$, $f(x) - 3 < 0$

25 **D'una funció $y = f(x)$, en coneixem les asímptotes i la posició de la corba respecte d'aquestes.**

$x = -1 \begin{cases} \text{si } x \to -1^-, \ f(x) \to +\infty \\ \text{si } x \to -1^+, \ f(x) \to +\infty \end{cases}$ $y = -2 \begin{cases} \text{si } x \to +\infty, \ f(x) > -2 \\ \text{si } x \to -\infty, \ f(x) < -2 \end{cases}$

Representa gràficament aquesta informació.



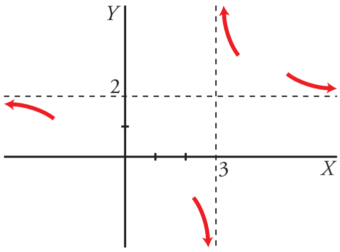
26 **Troba les asímptotes de les funcions següents i situa la corba respecte de cada una d'elles:**

a) $y = \dfrac{2x}{x-3}$ **b)** $y = \dfrac{x-1}{x+3}$ **c)** $y = \dfrac{2x+3}{4-x}$

d) $y = \dfrac{2}{1-x}$ **e)** $y = \dfrac{1}{2-x}$ **f)** $y = \dfrac{4x+1}{2x-3}$

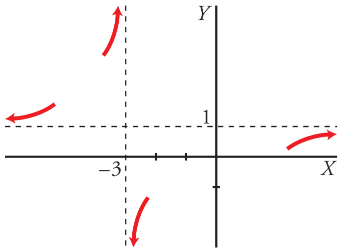
a) Asímptotes:

$x = 3$; $y = 2$



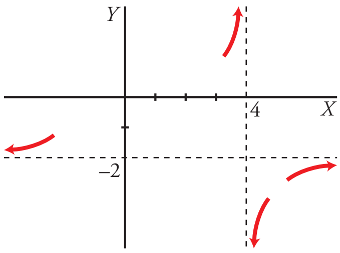
b) Asímptotes:

$x = -3$; $y = 1$



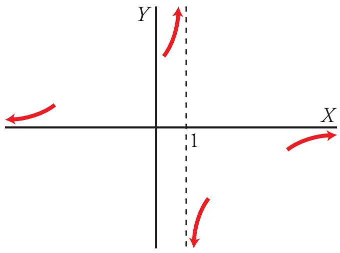
c) Asímptotes:

$x = 4$; $y = -2$



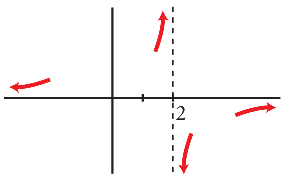
d) Asímptotes:

$x = 1$; $y = 0$



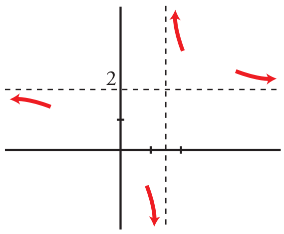
e) Asímptotes:

$x = 2$; $y = 0$



f) Asímptotes:

$x = \dfrac{3}{2}$; $y = 2$

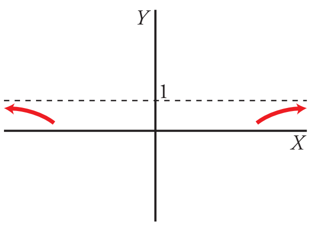


27 **Troba les asímptotes de les funcions següents i situa la corba respecte d'elles:**

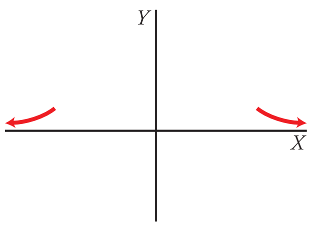
a) $y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$ **b)** $y = \dfrac{3}{x^2+1}$ **c)** $y = \dfrac{2x^2-1}{x^2}$

d) $y = \dfrac{x^4}{x-1}$ **e)** $y = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$ **f)** $y = \dfrac{3x}{x^2-1}$

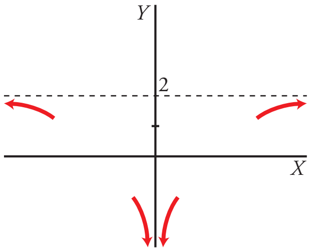
a) Asímptota: $y = 1$



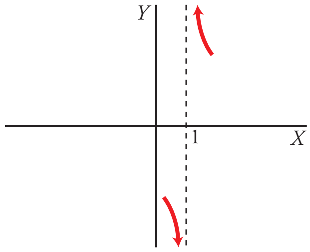
b) Asímptota: $y = 0$



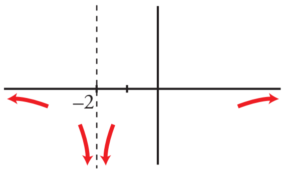
c) Asímptotes: $x = 0$; $y = 2$



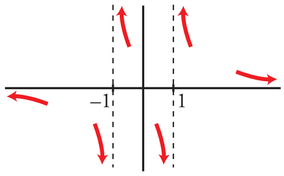
d) Asímptota: $x = 1$



e) Asímptotes: $x = -2$; $y = 0$



f) Asímptotes: $x = 1$, $x = -1$; $y = 0$



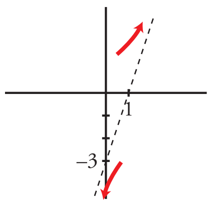
28 **Cada una de les funcions següents té una asímptota obliqua. Troba-la i estudia la posició de la corba respecte d'ella:**

a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3+x-x^2}{x}$ **c)** $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{2x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-3}$ **e)** $f(x) = \dfrac{2x^3-3}{x^2-2}$ **f)** $f(x) = \dfrac{-2x^2+3}{2x-2}$

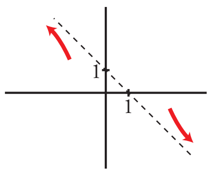
a) $\dfrac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \dfrac{3}{x+1}$

Asímptota obliqua: $y = 3x - 3$



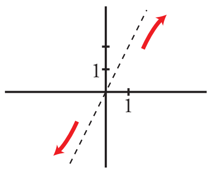
b) $\dfrac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \dfrac{3}{x}$

Asímptota obliqua: $y = -x + 1$



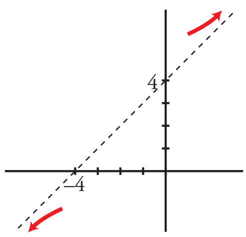
c) $\dfrac{4x^2-3}{2x} = 2x - \dfrac{3}{2x}$

Asímptota obliqua: $y = 2x$



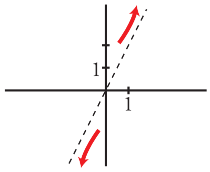
d) $\dfrac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \dfrac{10}{x-3}$

Asímptota obliqua: $y = x + 4$



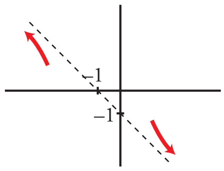
e) $\dfrac{2x^3-3}{x^2-2} = 2x + \dfrac{4x-3}{x^2-2}$

Asímptota obliqua: $y = 2x$



f) $\dfrac{-2x^2+3}{2x-2} = -x-1+\dfrac{1}{2x-2}$

Asímptota obliqua: $y = -x-1$



29 **Troba les asímptotes de les funcions següents i situa la corba respecte de cada una d'elles:**

a) $y = \dfrac{(3-x)^2}{2x+2}$

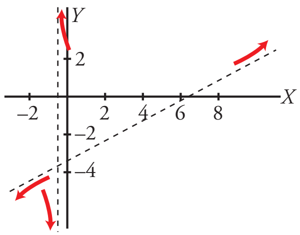
b) $y = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

c) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

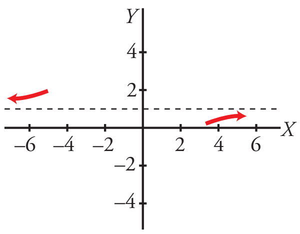
d) $y = \dfrac{3x^2}{x+2}$

a) $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{13}{4} + \dfrac{49/4}{2x+1}$

Asímptotes: $x = -\dfrac{1}{2}$; $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{13}{4}$

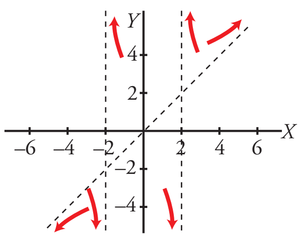


b) Asímptotes: $y = 1$

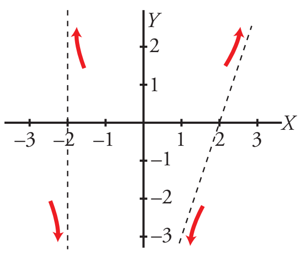


c) $y = x + \dfrac{4x}{(x+2)(x-2)}$

Asímptotes: $y = x$; $x = -2$, $x = 2$



d) Asímptotes: $x = -2$; $y = 3x - 6$



Per resoldre

30 **Calcula, en cada cas, el valor de k perquè la funció $f(x)$ sigui contínua en tot $\mathbb{R}$.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \le 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ **c)** $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \ne 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3 + k \end{array}\right\} \; 5 = 3 + k \;\to\; k = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array}\right\} \; 5 = 4 + 2k \;\to\; k = 1/2$

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(x+1)}{x} = 1 \;\to\; k = 1$

31 **Calcula k perquè les funcions següents siguin contínues en el punt on canvia la seva definició. Estudia'n després la continuïtat:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} & \text{si } x \ne 5 \\ k & \text{si } x = 5 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} & \text{si } x \ne 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$

a) Comencem estudiant el punt $x = 5$.

$f(5) = k$

$\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminació.

$\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{(x+5)(x-5)}{x(x-5)} = \dfrac{x+5}{x}$

$\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x+5}{x} = 2$

Si $k = 2$, la funció és contínua en $x = 5$.

Observem que el denominador també s'anul·la en $x = 0$; per tant, $f(0)$ no existeix. A més:

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 5x} = \dfrac{-25}{0} = \pm\infty$

Per tant, en $x = 0$ té una discontinuïtat de salt infinit (tipus I). En la resta dels punts és contínua.

b) Comencem estudiant el punt $x = 1$.

$f(1) = k$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{0}{0} \;\to$ Indeterminació.

$\dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{x}{x+2}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{1}{3}$

Si $k = \dfrac{1}{3}$, la funció és contínua en $x = 1$.

Veiem que el denominador també s'anul·la en $x = -2$; per tant, $f(-2)$ no existeix. A més,

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x}{x^2 + x - 2} = \dfrac{6}{0} = \pm\infty$

Per tant, en $x = -2$ hi ha una discontinuïtat de salt infinit (tipus I).

En la resta dels punts és contínua.

32 **Estudia la continuïtat de les funcions següents. Després, representa-les:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} e^{2-\sqrt{x}} & \text{si } x < 4 \\ log_2(x-2) & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

a) La primera branca és un tros d'hipèrbola desplaçada una unitat a la dreta. En el punt $x = 1$ presenta una discontinuïtat de salt infinit:

Com que 1 < 3, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0} = \pm\infty$

Si $x \longrightarrow 1^-$, $f(x) \longrightarrow -\infty$

Si $x \longrightarrow 1^+$, $f(x) \longrightarrow +\infty$

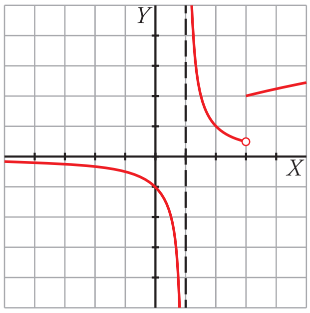
Vegem què passa en el punt de ruptura $x = 3$.

$f(3) = \sqrt{3+1} = 2$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x+1} = 2 \end{cases}$$

El límit no existeix en el punt $x = 3$ i té una discontinuïtat de salt finit (tipus II).

La segona branca està correctament definida i és contínua.



b) El domini de definició de la primera branca és l'interval [0, 4), ja que l'exponent de l'exponencial conté una arrel que existeix només quan $x \geq 0$. És contínua en el seu domini de definició.

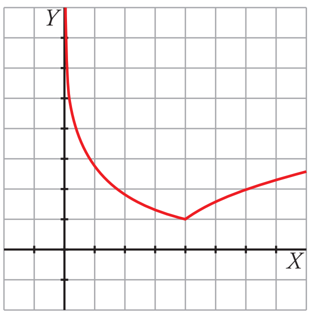
Vegem què passa en el punt de ruptura $x = 4$.

$f(4) = log_2(4-2) = 1$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 4^-} e^{2-\sqrt{x}} = e^{2-\sqrt{4}} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 4^+} log_2(x-2) = log_2(4-2) = 1 \end{cases}$$

Per tant, el límit existeix i la funció és contínua en aquest punt.

La segona branca és una funció logarítmica desplaçada dues unitats cap a la dreta i és contínua.



33 **Determina a i b perquè aquesta funció sigui contínua:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x + b & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \le x \le 3 \\ ax - 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudiem la continuïtat en els punts de ruptura.

- $x = -2$

$f(-2) = 4$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} 3x + b = -6 + b \\ \lim\limits_{x \to -2^+} 4 = 4 \end{cases}$$

Per tant, $-6 + b = 4 \ \rightarrow \ b = 10$ perquè existeixi el límit i la funció sigui contínua en $x = -2$.

- $x = 3$

$f(3) = 4$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 3^-} 4 = 4 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} ax - 2 = 3a - 2 \end{cases}$$

Per tant, $3a - 2 = 4 \ \rightarrow \ a = 2$ perquè existeixi el límit i la funció sigui contínua en $x = 3$.

Si $a = 2$ i $b = 10$, la funció és contínua en els punts de ruptura. En els altres punts també és contínua pel fet d'estar formada per trossos de rectes.

34 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{4-x^3}}$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2}$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

Calcularem aquests límits utilitzant el criteri dels graus del numerador i del denominador.

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+3}}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}} = 3$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{100x}{\sqrt[3]{x^2}} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{4-x^3}} = 0$ e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^6-7x}}{4x-2} = +\infty$ f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2} = \sqrt{2}$

35 **Troba les branques infinites de les següents funcions exponencials i logarítmiques:**

a) $y = 2^{x+3}$ **b)** $y = 1{,}5^x - 1$ **c)** $y = 2 + e^x$ **d)** $y = e^{-x} + 1$

e) $y = \log(x-3)$ **f)** $y = 1 - \ln x$ **g)** $y = \ln(2x+4)$ **h)** $y = \ln(x^2+1)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{x+3} = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més ràpid).

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2^{x+3} = 0$ (asímptota horitzontal).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1{,}5^x - 1) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més ràpid).

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1{,}5^x - 1) = -1$ (asímptota horitzontal).

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2 + e^x) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més ràpid).

$\lim\limits_{x \to -\infty} (2 + e^x) = 2$ (asímptota horitzontal).

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^{-x} + 1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = 1$ (asímptota horitzontal).

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x} + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{e^x}\right) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més ràpid).

e) El seu domini és $(3, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log(x - 3) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més lent).

$\lim\limits_{x \to 3^+} \log(x - 3) = -\infty$ (asímptota vertical).

f) El seu domini és $(0, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \ln x) = -\infty$ (branca parabòlica cap avall de creixement cada cop més lent).

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1 - \ln x) = +\infty$ (asímptota vertical).

g) El seu domini és $(-2, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(2x + 4) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més lent).

$\lim\limits_{x \to -2^+} \ln(2x + 4) = -\infty$ (asímptota vertical).

h) El seu domini és $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més lent).

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2 + 1) = +\infty$ (branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més lent).

Pàgina 298

36 Troba el límit de les funcions següents en els punts que anul·len el seu denominador:

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x}$

b) $g(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2}$

Quines són les asímptotes de f, de g i de h?

a) Trobem les arrels del denominador.

$x^3 - 6x^2 + 9x = 0 \to x_1 = 0,\ x_2 = 3$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \dfrac{-9}{0} = \pm\infty$

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \to \dfrac{2 \cdot (-0{,}01)^3 - 13 \cdot (-0{,}01)^2 + 24 \cdot (-0{,}01) - 9}{(-0{,}01)^3 - 6 \cdot (-0{,}01)^2 + 9 \cdot (-0{,}01)} = 102 \to$

$\to \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = +\infty$

DRETA: $x = 0{,}01 \to \dfrac{2 \cdot 0{,}01^3 - 13 \cdot 0{,}01^2 + 24 \cdot 0{,}01 - 9}{0{,}01^3 - 6 \cdot 0{,}01^2 + 9 \cdot 0{,}01} = -98 \to \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$\dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \dfrac{(2x - 1)(x - 3)^2}{x(x - 3)^2} = \dfrac{2x - 1}{x}$; $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^3 - 13x^2 + 24x - 9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x - 1}{x} = \dfrac{5}{3}$

b) Trobem les arrels del denominador.

$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

- $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminació.

$$\frac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{(4x+3)(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)^2} = \frac{4x+3}{x-2};\ \lim_{x \to -2} \frac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{x \to -2} \frac{4x+3}{x-2} = \frac{5}{4}$$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminació.

$$\lim_{x \to 2} \frac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \lim_{x \to 2} \frac{4x+3}{x-2} = \frac{11}{0} = \pm\infty$$

ESQUERRA: $x = 1{,}99 \rightarrow \dfrac{4 \cdot 1{,}99 + 3}{1{,}99 - 2} = -1\,096 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = -\infty$

DRETA: $x = 2{,}01 \rightarrow \dfrac{4 \cdot 2{,}01 + 3}{2{,}01 - 2} = 1\,104 \rightarrow \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 16x - 12}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = +\infty$

c) Trobem les arrels del denominador.

$x^4 + 2x^3 - 8x^2 = 0 \rightarrow x_1 = -4,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$

- $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminació.

$$\frac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \frac{(x-2)(x+4)^2}{x^2(x+4)(x-2)} = \frac{x+4}{x^2};\ \lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \lim_{x \to -4} \frac{x+4}{x^2} = 0$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{-32}{0} = \pm\infty$

ESQUERRA: $x = -0{,}01 \rightarrow \dfrac{-0{,}01 + 4}{(-0{,}01)^2} = 39\,900 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = +\infty$

DRETA: $x = 0{,}001 \rightarrow \dfrac{0{,}01 + 4}{0{,}01^2} = 40\,100 \rightarrow \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \dfrac{0}{0} \rightarrow$ Indeterminació.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 6x^2 - 32}{x^4 + 2x^3 - 8x^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x+4}{x^2} = \frac{3}{2}$$

Les asímptotes verticals són:

- De $f(x)$, la recta $x = 0$.
- De $g(x)$, la recta $x = 2$.
- De $h(x)$, la recta $x = 0$.

37 **Troba les asímptotes de les funcions següents i estudia la posició de cada corba respecte d'elles:**

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 6x^2 - 7}{x(x^2+6)}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4}$ d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x - 3}$

a) • Asímptotes verticals:

El denominador s'anul·la quan $x = 0$. Calculem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 6x^2 - 7}{x(x^2+6)} = \frac{-7}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = 0$ és una asímptota vertical. Estudiem la posició:

Si $x \to 0^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 0^+$, $f(x) \to -\infty$

• Branques en l'infinit:

Com que la diferència entre els graus del numerador i del denominador és 1, té una asímptota obliqua.

$$\frac{x^4 + 6x^2 - 7}{x(x^2+6)} = \frac{x^4 + 6x^2 - 7}{x^3 + 6x} = x - \frac{7}{x^3 + 6x}$$

La recta $y = x$ és l'asímptota obliqua. Estudiem la posició:

$$f(x) - x = \frac{-7}{x^3 + 6x} \quad \begin{cases} - \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

b) • Asímptotes verticals:

El denominador s'anul·la quan $x = 2$. Calculem:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{0}{0} \to \text{Indeterminació.}$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x^2+3)}{2(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{2(x-2)}; \quad \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+3}{2(x-2)} = \frac{7}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = 2$ és una asímptota vertical. Estudiem la posició:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

• Branques en l'infinit:

Com que la diferència entre els graus del numerador i del denominador és 1, té una asímptota obliqua.

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{2(x-2)^2} = \frac{x^2+3}{2(x-2)} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{7}{2x-4}$$

La recta $y = \dfrac{x}{2} + 1$ és l'asímptota obliqua. Estudiem la posició:

$$f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{7}{2x-4} \quad \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ - \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

c) • Asímptotes verticals.

El denominador s'anul·la quan $x = -2$, $x = 2$. Calculem:

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^3 + x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = -2$ és una asímptota vertical. Estudiem la posició:

Si $x \to -2^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to -2^+$, $f(x) \to -\infty$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^3 + x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = 2$ és una asímptota vertical. Estudiem la posició:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to +\infty$

- Branques en l'infinit:

Com que la diferència entre els graus del numerador i del denominador és 1, té una asímptota obliqua.

$$\frac{2x^3 + x^2 - 8x - 1}{x^2 - 4} = 2x + 1 + \frac{3}{x^2 - 4}$$

La recta $y = 2x + 1$ és l'asímptota obliqua. Estudiem la posició:

$$f(x) - (2x + 1) = \frac{3}{x^2 - 4} \begin{cases} + \text{ si } x \to +\infty \\ + \text{ si } x \to -\infty \end{cases}$$

d) • Asímptotes verticals:

El denominador s'anul·la quan $x = 3$. Calculem:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x - 3} = \frac{3}{0} = \pm\infty$$

La recta $x = 3$ és una asímptota vertical. Estudiem la posició:

Si $x \to 3^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 3^+$, $f(x) \to +\infty$

- Branques en l'infinit:

Com que la diferència entre els graus del numerador i del denominador és 2, té branques parabòliques de creixement cada cop més ràpid i totes dues són cap amunt perquè:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x - 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 12}{x - 3} = +\infty$$

38 **Calcula el límit de la funció $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3}}{x}$ quan $x \to 0$, $x \to +\infty$ i $x \to -\infty$. Digues quines en són les asímptotes i situa la corba respecte d'elles.**

- $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{0} = \pm\infty$

  La recta $x = 0$ és una asímptota vertical. Estudiem la seva posició:

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = 1$, la recta $y = 1$ és una asímptota horitzontal per la dreta.

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = -1$ (numerador i denominador tenen signe diferent).

  La recta $y = -1$ és una asímptota horitzontal per l'esquerra.

  Si $x \to +\infty$, $f(x) - 1 = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{x} > 0$, la funció és sobre l'asímptota.

  Si $x \to -\infty$, $f(x) - (-1) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3} + x}{x} < 0$, la funció és sota l'asímptota.

39 **En una empresa es fan muntatges en cadena. El nombre de muntatges realitzats per un treballador sense experiència depèn dels dies d'entrenament segons la funció $M(t) = \dfrac{30t}{t+4}$ (t en dies).**

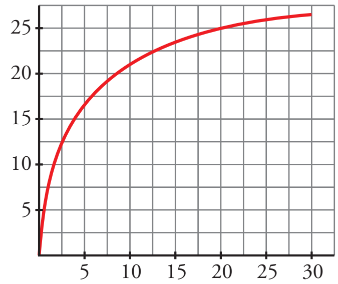
a) Quants muntatges realitza el primer dia? I el desè?

b) Representa la funció sabent que el període d'entrenament és d'un mes.

c) Què passaria amb el nombre de muntatges si l'entrenament fos molt més llarg?

a) $M(1) = 6$ muntatges el primer dia.

$M(10) = 21{,}43 \rightarrow$ 21 muntatges el desè dia.

b) 

c) S'aproxima a 30; doncs $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{30t}{t+4} = 30$.

40 **El nombre de peixos d'una piscifactoria evoluciona segons la funció $f(t) = 50 + \dfrac{100t^2}{t^2+1}$ (t en dies).**

a) Comprova que el nombre de peixos augmenta la primera setmana.

b) Esbrina si el creixement serà indefinit o si tendirà a estabilitzar-se.

a) Completem una taula amb els valors de la primera setmana.

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	50	100	130	140	144	146	147

Podem comprovar que el nombre creix però d'una manera cada cop més lenta.

b) Per estudiar el comportament de la funció a llarg termini podem calcular $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(50 + \dfrac{100t^2}{t^2+1}\right) = 150$.

Aquest resultat indica clarament que el creixement tendeix a estabilitzar-se.

41 **Determina el valor de a i de b de manera que les rectes $x = 3$ i $y = \dfrac{3}{2}$ siguin asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{ax+3}{bx-4}$.**

Pot tenir asímptota obliqua?

Perquè $x = 3$ sigui una asímptota, el denominador s'ha d'anul·lar en aquest punt. Per tant:

$b \cdot 3 - 4 = 0 \rightarrow b = \dfrac{4}{3}$

$$f(x) = \frac{ax+3}{\frac{4}{3}x - 4} = \frac{3ax+9}{4x-12}$$

Perquè $y = \dfrac{3}{2}$ sigui una asímptota horitzontal ha de passar que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \dfrac{3}{2}$.

Per altra banda, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{3ax+9}{4x-12} = \dfrac{3a}{4}$

Per tant, $\dfrac{3a}{4} = \dfrac{3}{2} \rightarrow a = 2$

No pot tenir asímptota obliqua.

42 **Donada la funció** $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + b & \text{si } x \leq 2 \\ ln\,(x-1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$**, calcula el valor de a i de b perquè f sigui contínua i la seva gràfica passi per l'origen de coordenades.**

Perquè la seva gràfica passi per l'origen de coordenades, $f(0) = 0$.

Per tant, $2 \cdot 0^2 + a \cdot 0 + b = 0$, d'on veiem que $b = 0$.

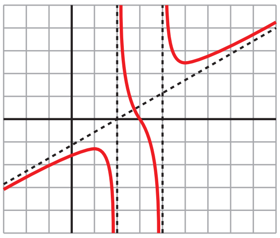
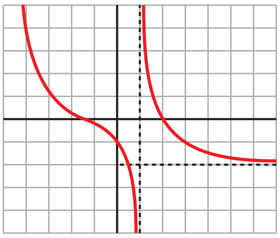
Exigim la continuïtat en el punt de ruptura:

$f(2) = 2 \cdot 2^2 + a \cdot 2 = 2a + 8$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} (2x^2 + ax) = 2a + 8 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} ln\,(x-1) = 0 \end{cases} \quad \text{Per tant, } 2a + 8 = 0 \rightarrow a = -4$$

La funció és contínua en la resta de $\mathbb{R}$ perquè és formada per dos trossos: un de paràbola i un altre de funció logarítmica ben definit.

43 **Observa les gràfiques següents i descriu-ne les branques infinites, les asímptotes i la posició de la corba respecte d'aquestes:**

a)  **b)** 

a) Asímptotes verticals: rectes $x = 2$ i $x = 4$.

Posició:

Si $x \rightarrow 2^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

Si $x \rightarrow 2^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

Si $x \rightarrow 4^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

Si $x \rightarrow 4^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

Asímptota obliqua: recta $y = \dfrac{x}{2} - 1$

Posició:

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > \dfrac{x}{2} - 1$

Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) < \dfrac{x}{2} - 1$

b) Asímptota vertical: recta $x = 1$

Si $x \rightarrow 1^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

Si $x \rightarrow 1^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

Asímptota horitzontal: recta $x = -2$ en $+\infty$

Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) > 2$

Branca parabòlica cap amunt de creixement cada cop més ràpid en $-\infty$.

44 **Representa, en cada cas, una funció que compleixi les condicions donades:**

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3,\ f(x) < 3;\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1,\ f(x) < 1;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1,\ f(x) > -1$

c) **Asímptota vertical:** $x = 1$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

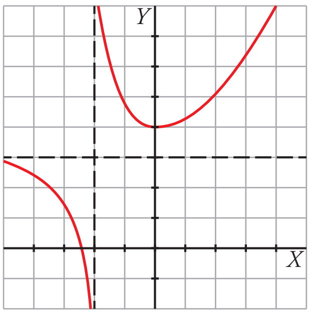
Asímptota obliqua: $y = x + 2$

diferència $[f(x) - y] < 0$ **si** $x \to \pm\infty$

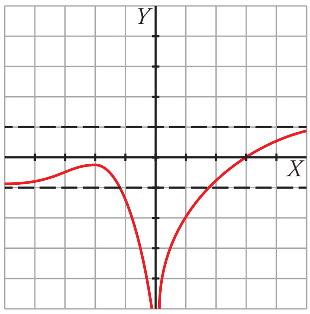
d) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty;\quad \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2,\ f(x) > 2;\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2,\ f(x) < 2$

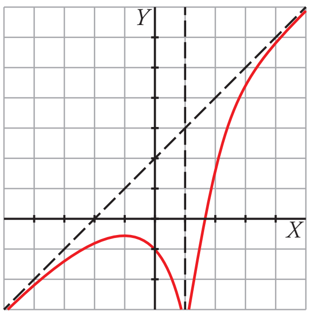
a)



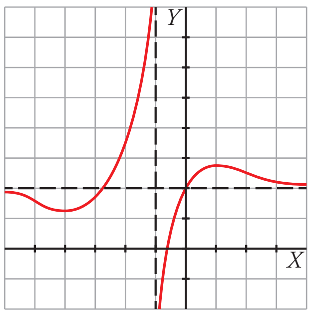
b)



c)



d)



45 **Considera les funcions** $y = \sin x$ **i** $y = \cos x$ **definides en l'interval** $[0, 2\pi]$**. Troba les asímptotes de les funcions** $f(x) = \dfrac{1}{\sin x};\ g(x) = \dfrac{1}{\cos x};\ h(x) = \dfrac{1}{1 - 2\cos x}$ **i situa la corba respecte d'elles.**

Només té sentit l'estudi de les asímptotes verticals.

- $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ en l'interval $[0, 2\pi]$.

$\sin x = 0 \ \to\ x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$ són asímptotes verticals.

Posició:

Si $x \to 0^+,\ f(x) \to +\infty$

Si $x \to \pi^-,\ f(x) \to +\infty$

Si $x \to \pi^+,\ f(x) \to -\infty$

Si $x \to 2\pi^-,\ f(x) \to -\infty$

- $g(x) = \dfrac{1}{cos\ x}$ en l'interval $[0, 2\pi]$.

  $cos\ x = 0 \ \rightarrow\ x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3\pi}{2}$ són asímptotes verticals.

  Posició:

  Si $x \rightarrow \dfrac{\pi}{2}^-,\ g(x) \rightarrow +\infty$

  Si $x \rightarrow \dfrac{\pi}{2}^+,\ g(x) \rightarrow -\infty$

  Si $x \rightarrow \dfrac{3\pi}{2}^-,\ g(x) \rightarrow -\infty$

  Si $x \rightarrow \dfrac{3\pi}{2}^+,\ g(x) \rightarrow +\infty$

- $h(x) = \dfrac{1}{1 - 2\,cos\ x}$ en l'interval $[0, 2\pi]$

  $1 - 2cos\ x = 0 \ \rightarrow\ x = \dfrac{\pi}{3},\ x = \dfrac{5\pi}{3}$ són asímptotes verticals.

  Posició:

  Si $x \rightarrow \dfrac{\pi}{3}^-,\ h(x) \rightarrow -\infty$

  Si $x \rightarrow \dfrac{\pi}{3}^+,\ h(x) \rightarrow +\infty$

  Si $x \rightarrow \dfrac{5\pi}{3}^-,\ h(x) \rightarrow +\infty$

  Si $x \rightarrow \dfrac{5\pi}{3}^+,\ h(x) \rightarrow -\infty$

46 Calcula el valor de a perquè $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5x}{x+1} - ax$ sigui un nombre real.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5x}{x+1} - ax \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 5x - ax^2 - ax}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(3-a)x^2 - (5+a)x}{x+1}$$

Perquè el límit sigui un nombre real, el grau del numerador ha de ser igual al del denominador. Per tant:

$3 - a = 0 \ \rightarrow\ a = 3,$ resultant ser el límit igual a -8.

47 Troba els límits següents (fes servir la calculadora):

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{ln\ x}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^5}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,(2x+3)}{x^2}$ **e)** $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - x^4)$ **f)** $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75^x - x^2)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x} = 0$ perquè per a $x = 100 \ \rightarrow\ \dfrac{100^3}{e^{100}} = 3{,}7201 \cdot 10^{-38}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{ln\ x} = +\infty$ perquè per a $x = 10\,000 \ \rightarrow\ \dfrac{10\,000}{ln\,10\,000} = 1\,085{,}7$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^5} = +\infty$ perquè per a $x = 100 \ \rightarrow\ \dfrac{e^{100} - 1}{100^5} = 2{,}6881 \cdot 10^{33}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ln\,(2x+3)}{x^2} = 0$ perquè per a $x = 100 \ \rightarrow\ \dfrac{ln\,(2 \cdot 100 + 3)}{100^2} = 0{,}00053$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - x4) = +\infty$ perquè per a $x = 100 \ \rightarrow\ 2^{100} - 100^4 = 1{,}2677 \cdot 10^{30}$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (0{,}75x - x^2) = -\infty$ perquè per a $x = 100 \ \rightarrow\ 0{,}75^{100} - 100^2 = -10\,000$

48 **La funció $f(x) = \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$ és discontínua en $x = 3$ i $x = -3$.**

Estudia el tipus de discontinuïtat que presenta en aquests punts segons els valors de m.

La funció $f(x)$ no està definida en els punts $x = 3$ i $x = -3$.

- $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$

  Si $3^3 + m \cdot 3^2 + 9 = 0$, és a dir, si $m = -4$, tindríem una indeterminació del tipus $\dfrac{0}{0}$.

  Per tant, si $m = -4$, $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x^2 - x - 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 3}{x + 3} = \dfrac{1}{2}$

  La discontinuïtat en $x = 3$ és evitable del tipus III.

  Per a $m = -4$, en $x = -3$ tenim una discontinuïtat de salt infinit (tipus I) perquè:

  $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 - 4x^2 + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{-54}{0} = \pm\infty$

- $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + mx^2 + 9}{x^2 - 9}$

  Si $(-3)^3 + m \cdot (-3)^2 + 9 = 0$, és a dir, si $m = 2$, tindríem una indeterminació del tipus $\dfrac{0}{0}$.

  Per tant, si $m = 2$, $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{(x+3)(x^2 - x + 3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x + 3}{x - 3} = \dfrac{-5}{2}$

  i tenim una discontinuïtat evitable de tipus III en $x = -3$.

  Per a $m = 2$, en $x = 3$ hi ha una discontinuïtat de salt infinit (tipus I) perquè:

  $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 9}{x^2 - 9} = \dfrac{54}{0} = \pm\infty$

Si $m \neq -4$ i $m \neq 2$, les discontinuïtats en $x = 3$ i $x = -3$ són de salt infinit (tipus I) perquè el numerador de la funció no s'anul·la.

Pàgina 299

Qüestions teòriques

49 **Cert o fals? Justifica la resposta i posa'n exemples.**

a) Si no existeix $f(2)$, no es pot calcular $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

b) Si no existeix $f(1)$, $f(x)$ no pot ser contínua en $x = 1$.

c) Una funció no pot tenir més de dues asímptotes horitzontals.

d) Una funció pot tenir cinc asímptotes verticals.

e) Si $g(a) = 0$, podem afirmar que $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ té asímptota vertical.

f) La funció $y = 2^{-x}$ no té asímptotes.

a) Fals. En una discontinuïtat evitable de tipus III no existeix la funció en un punt però sí existeix el límit.

b) Cert, ja que no es compleix una de les condicions de la continuïtat.

c) Cert. Si tingués tres o més asímptotes horitzontals, dues coincidirien per un dels extrems de l'eix OX i això és impossible perquè la funció no pot tendir simultàniament a dos resultats diferents.

d) Cert. Fins i tot pot tenir infinites asímptotes verticals, com passa amb la funció $y = tg\,x$.

e) Fals. Si $f(a) = 0$, pot passar que la funció tingui una discontinuïtat evitable en $x = a$.

f) Fals. Perquè $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2^x} = 0$ i la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$.

50 **Quins són els punts de discontinuïtat de $y = Ent(x)$ i $y = Mant(x)$?**

Són els punts de la forma $x = k$ amb k nombre enter.

51 **Justifica per què no existeix $\lim\limits_{x \to +\infty} sin\, x$.**

Com que la funció $y = sin\, x$ és periòdica, els valors que pren y oscil·len quan $x \to +\infty$ i, a més, ho fan sense acostar-se a cap nombre concret. Per tant, el límit no pot existir.

52 **Quin d'aquests límits no existeix?:**

a) $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{4 - x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{4 - x}$

El límit b) perquè, quan $x \to 4^+$, $x > 4$. Aleshores $4 - x < 0$ i l'arrel quadrada no existeix.

53 **Donada la funció $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \ldots + h$, justifica si són certes o falses les afirmacions següents:**

a) Si $a > 0$ i n és parell, aleshores $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b) Si $a > 0$ i n és senar, aleshores $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

c) Si $a < 0$ i n és parell, aleshores $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

d) Si $a < 0$ i n és senar, aleshores $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

a) Fals.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ perquè $ax^n > 0$ en ser n parell i $a > 0$.

b) Fals.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ perquè $ax^n < 0$ en ser n imparell i $a > 0$.

c) Cert.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = -\infty$ perquè $ax^n < 0$ en ser n parell i $a < 0$.

d) Cert.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} ax^n = +\infty$ perquè $ax^n > 0$ en ser n imparell i $a < 0$.

Per aprofundir

54 **Calcula els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |2x + 1|$ **b)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (|x| + x - 3)$ **c)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (|x + 4| + |x|)$ **d)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (|x + 2| - |x|)$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} |2x + 1| = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} |2x + 1| = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x + 1) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x| + x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (|x| + x - 3) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x + x - 3) = \lim\limits_{x \to +\infty} -3 = -3$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x + 4| + |x|) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 4 + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (2x + 4) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (|x + 4| + |x|) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x - 4 - x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x - 4) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} (|x + 2| - |x|) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x + 2 - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2 = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (|x + 2| - |x|) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x - 2 + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2 = -2$

55 Troba les asímptotes de les funcions següents:

a) $y = \dfrac{|x|}{2 - x}$ **b)** $y = \dfrac{|2x + 1|}{x - 1}$

a) • Verticals: $x = 2$

Posició:

Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$

Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

• Horitzontals:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x|}{2 - x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2 - x} = -1$. La recta $y = -1$ és una asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|x|}{2 - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{2 - x} = 1$. La recta $y = 1$ és una asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$.

b) • Verticals: $x = 1$

Posició:

Si $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$

Si $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$

• Horitzontals:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|2x + 1|}{x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 1}{x - 1} = 2$. La recta $y = 2$ és una asímptota horitzontal quan $x \to +\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{|2x + 1|}{x - 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x + 1}{x - 1} = -2$. La recta $y = -2$ és una asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$.

56 La funció $y = 2^{1/x}$, té límit quan $x \to 0$?

$\lim\limits_{x \to 0} 2^{1/x} = 2^{\pm\infty}$

Estudiem els límits laterals:

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{1/x} = 2^{+\infty} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} 2^{1/x} = 2^{-\infty} = 0$

Per tant, no existeix el límit donat.

57 Troba $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

Per a això, multiplica numerador i denominador pel binomi conjugat $(\sqrt{x} + 1)$ del denominador.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$\dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \dfrac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \dfrac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{x - 1} = \sqrt{x} + 1 \to \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} + 1 = 2$

58 **Troba els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{x - 2}$ b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1}$ c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5}$

d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5}$ e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{2x + 1} - 3}$ f) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{3x - 2} - 5}{\sqrt{2x + 7} - 5}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$$\frac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \frac{(x - \sqrt{2x})(x + \sqrt{2x})}{(x - 2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x^2 - 2x}{(x - 2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + \sqrt{2x})} = \frac{x}{x + \sqrt{2x}}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x}{x + \sqrt{2x}} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$$\frac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1} = \frac{(x - 3)(\sqrt{4 - x} + 1)}{(\sqrt{4 - x} - 1)(\sqrt{4 - x} + 1)} = \frac{(x - 3)(\sqrt{4 - x} + 1)}{3 - x} = \sqrt{4 - x} + 1$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - 3}{\sqrt{4 - x} - 1} = \lim_{x \to 3} \sqrt{4 - x} + 1 = 2$$

c) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$$\frac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5} = \frac{(\sqrt{2x - 1} - 3)(\sqrt{2x - 1} + 3)}{(x - 5)(\sqrt{2x - 1} + 3)} = \frac{2x - 10}{(x - 5)(\sqrt{2x - 1} + 3)} = \frac{2(x - 5)}{(x - 5)(\sqrt{2x - 1} + 3)} = \frac{2}{\sqrt{2x - 1} + 3}$$

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{2x - 1} - 3}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{2}{\sqrt{2x - 1} + 3} = \frac{1}{3}$$

d) $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$$\frac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5} = \frac{(x - 7)(\sqrt{3x + 4} + 5)}{(\sqrt{3x + 4} - 5)(\sqrt{3x + 4} + 5)} = \frac{(x - 7)(\sqrt{3x + 4} + 5)}{3x - 21} = \frac{(x - 7)(\sqrt{3x + 4} + 5)}{3(x - 7)} = \frac{\sqrt{3x + 4} + 5}{3}$$

$$\lim_{x \to 7} \frac{x - 7}{\sqrt{3x + 4} - 5} = \lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{3x + 4} + 5}{3} = \frac{10}{3}$$

e) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{2x + 1} - 3} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$$\frac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{2x + 1} - 3} = \frac{(\sqrt{6x + 1} - 5)(\sqrt{6x + 1} + 5)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{(\sqrt{2x + 1} - 3)(\sqrt{6x + 1} + 5)(\sqrt{2x + 1} + 3)} = \frac{(6x - 24)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{(2x - 8)(\sqrt{6x + 1} + 5)} =$$

$$= \frac{6(x - 4)(\sqrt{2x + 1} + 3)}{2(x - 4)(\sqrt{6x + 1} + 5)} = \frac{3(\sqrt{2x + 1} + 3)}{\sqrt{6x + 1} + 5}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{6x + 1} - 5}{\sqrt{2x + 1} - 3} = \lim_{x \to 4} \frac{3(\sqrt{2x + 1} + 3)}{\sqrt{6x + 1} + 5} = \frac{9}{5}$$

f) $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{3x - 2} - 5}{\sqrt{2x + 7} - 5} = \dfrac{0}{0} \to$ Indeterminació.

$$\frac{\sqrt{3x - 2} - 5}{\sqrt{2x + 7} - 5} = \frac{(\sqrt{3x - 2} - 5)(\sqrt{3x - 2} + 5)(\sqrt{2x + 7} + 5)}{(\sqrt{2x + 5} + 5)(\sqrt{3x - 2} + 5)(\sqrt{2x + 7} + 5)} = \frac{(3x - 27)(\sqrt{2x + 7} + 5)}{(2x - 18)(\sqrt{3x - 2} + 5)} =$$

$$= \frac{3(x - 9)(\sqrt{2x + 7} + 5)}{2(x - 9)(\sqrt{3x - 2} + 5)} = \frac{3(\sqrt{2x + 7} + 5)}{2(\sqrt{3x - 2} + 5)}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{3x - 2} - 5}{\sqrt{2x + 7} - 5} = \lim_{x \to 9} \frac{3(\sqrt{2x + 7} + 5)}{2(\sqrt{3x - 2} + 5)} = \frac{3}{2}$$

59 **Calcula les asímptotes verticals de $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ i estudia la posició de la funció respecte d'aquestes. Té asímptota horitzontal?**

El domini de definició de la funció és la solució de la inequació $x^2 - 1 > 0$; és a dir, $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Les asímptotes verticals són les rectes $x = -1$ i $x = 1$. Només podem acostar-nos per un costat a cada una de les asímptotes.

Posició:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{0} = +\infty$$

Vegem ara les asímptotes horitzontals. Utilitzem la regla dels graus del numerador i del denominador.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$$

Per tant, no té asímptotes horitzontals.

Autoavaluació

Pàgina 299

1 **Calcula el límit de** $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$ **en els punts d'abscisses 0, 3 i 5.**

Després, digues si la funció és contínua en aquests punts.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{array} \right\} \text{No té límit en } x = 3.$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

És contínua en $x = 0$ i en $x = 5$. No és contínua en $x = 3$, perquè no té límit en aquest punt.

2 **Troba els límits següents:**

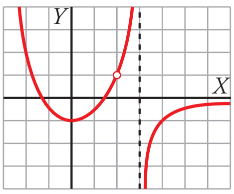
a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x - 4)^2}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

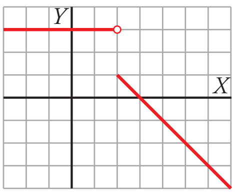
b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x + 4}} = \dfrac{1}{\sqrt{49}} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x - 4)^2} = +\infty$ (Si $x \longrightarrow 4^+$ o si $x \longrightarrow 4^-$, els valors de la funció són positius).

3 **a)**



b)



A partir de la gràfica d'aquestes dues funcions, troba, en cada cas, els límits següents:

$$\lim_{x \to 3} f(x); \quad \lim_{x \to 2} f(x); \quad \lim_{x \to +\infty} f(x); \quad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\}$ No té límit en $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{array} \right\}$ No té límit en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

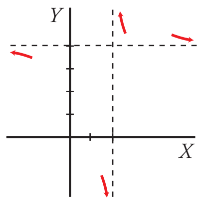
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

4 **Troba les asímptotes de la funció $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x}$ i estudia la posició de la corba respecte d'elles.**

Simplifiquem: $\dfrac{4x^2}{x^2 - 2x} = \dfrac{4x}{x - 2} \rightarrow y = \dfrac{4x}{x - 2}$

- Asímptota vertical: $x = 2$

Posició $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x}{x-2} = +\infty \end{cases}$



- Asímptota horitzontal: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x}{x-2} = 4;\ y = 4$

Posició: $\begin{cases} x \rightarrow +\infty,\ y > 4 \\ x \rightarrow -\infty,\ y < 4 \end{cases}$

5 **Justifica quin valor ha de prendre a perquè la funció $f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$ sigui contínua en $\mathbb{R}$.**

$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La funció és contínua per a valors de x més petits que 1 i més grans que 1, perquè ambdós trams són rectes.

Perquè sigui contínua en $x = 1$, ha de complir-se: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{array} \right\}$

Perquè existeixi el límit, ha de ser: $a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$

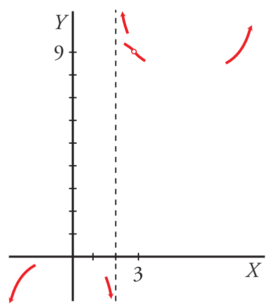
6 **Troba el límit de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ quan $x \rightarrow 3$; $x \rightarrow 2$; $x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$ i representa la informació que obtinguis.**

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{0}{0}$

Simplifiquem: $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x^2}{x-2}$

$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x-2} = 9$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x-2} \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right.$

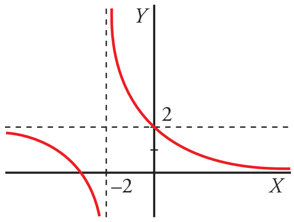


- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty$

7 **Representa una funció que compleixi les condicions següents:**

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ **b)** $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ **d)** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$



8 **Estudia les branques infinites de** $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+4}$ **i situa la corba respecte a la seva asímptota.**

No té asímptotes verticals perquè $x^2 + 4 \neq 0$ per a qualsevol valor de x.

No té asímptotes horitzontals perquè $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+4} = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+4} = -\infty$.

Té una asímptota obliqua, perquè el grau del numerador és una unitat més gran que el del denominador.

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 & x^2+4 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 8x & 2x \\ \quad\;\; -8x & \end{array}$$

$$y = \frac{2x^3}{x^2+4} = 2x - \frac{8x}{x^2+4}$$

Asímptota obliqua: $y = 2x$

Posició: $x \to +\infty$ corba < asímptota; $x \to -\infty$ corba > asímptota